PRÉ-CÁLCULO

UNITAU digital

ARMANDO ANTÔNIO MONTEIRO DE CASTRO

Armando Antônio Monteiro de Castro

Pré-Cálculo

Taubaté 2022

Reitora	Profa. Dra. Nara Lucia Perondi Fortes
Vice-reitor	Prof. Dr. Jean Soldi Esteves
Pró-reitor de Administração	Prof. Dr. Jean Soldi Esteves
Pró-reitor de Economia e Finanças	Prof. Dr. Francisco José Grandinetti
Pró-reitora Estudantil	Profa. Dra. Máyra Cecilia Dellu
Pró-reitor de Extensão e Relações Comunitárias	Profa. Dra. Letícia Maria P. da Costa
Pró-reitora de Graduação	Profa. Ma. AngelaPopoviciBerbare
Pró-reitor de Pesquisa e Pós-graduação	Prof. Dra. Sheila CavalcaCortelli
Comissão de Gestão Compartilhada EaD Unitau	Esp. Helen Francis Silva Me. José Maria da Silva Junior Dra. Márcia Regina de Oliveira

Revisão ortográfica-textual	Prof. Me. João de Oliveira Profa. Ma. Isabel Rosângela dos Santos Amaral
Designer Instrucional	Jaqueline de Carvalho
Direção de arte	Unitau Digital
Projeto Gráfico/ Diagramação	Danilo César Monteiro
Autor	Armando Antônio Monteiro de Castro
Unitau-Reitoria	Rua Quatro de Março,432, Centro Taubaté – São Paulo. CEP:12.020-270 Central de Atendimento:0800557255
Polo Taubaté – Sede	Rua Conselheiro Moreira de Barros, 203 - Centro Taubaté – São Paulo. CEP:12.010-080 Telefones: Coordenação Geral: (12) 3621-1530 Secretaria: (12) 3622-6050

edUNITAU

EXPEDIENTE EDITORA

Sistema Integrado de Bibliotecas - SIBi/ UNITAU
Grupo Especial de Tratamento da Informação – GETI

C355a Castro, Armando Antônio Monteiro de
Pré-cálculo [recurso eletrônico] / Armando Antônio de Castro. – Dados eletrônicos. -- Taubaté : EdUnitau, 2022.

Formato: PDF
Requisitos do sistema: Adobe
Modo de acesso: world wide web

ISBN: 978-65-86914-48-1 (on-line)

1. Conjunto de número reais. 2. Polinômios. 3. Números complexos. 4. Funções. 5. Trigonometria. I. Título.

CDD – 510

Ficha catalográfica elaborada pela Bibliotecária Ana Beatriz Ramos – CRB-8/6318

Índice para Catálogo sistemático

Conjunto de número reais – 510
Polinômios – 512.942
Números complexos – 516.35
Funções – 511.33
Trigonometria – 512.13

Sumário

Recursos de Imersão:

Explorando ideias

Eu indico

Pensando juntos

Pípulas de conhecimento

Podcast

QRCode

Pré-Cálculo

Unidade I
O Corpo dos números Reais

Nesta Unidade, estudaremos os conjuntos numéricos utilizados nos cálculos algébricos, ou seja, o conjunto dos números naturais, inteiros, racionais e irracionais, que juntos formam o que chamamos de "Conjunto dos Números Reais". A "criação" ou "estruturação" de cada conjunto se deu mediante a necessidade do ser humano de efetuar certas operações e, na sua impossibilidade, a criatividade do pensamento aliado ao rigor de preceitos lógicos tornou possível o "aparecimento" dos conjuntos citados. Obviamente, o que será apresentado não "nasceu" pronto, pois é fruto de necessidades intrínsecas ao ser humano: observar a realidade que o rodeia, interpretá-la, modelá-la, usando linguagem simbólica, e dar solução a questionamentos quaisquer e, eventualmente, modificá-la à sua conveniência. Desse modo, os números são fundamentais no processo, pois com eles quantificamos, mensuramos, avaliamos e projetamos grandezas.

1.1 O conjunto dos números naturais, inteiros, racionais e irracionais compondo o conjunto dos números reais

Fonte: Armando Antonio Monteiro de Castro

Os números foram "aparecendo" em face a necessidade de o ser humano estabelecer processos de contagem e mensuração. Seja a de um pastor que, ao levar seu rebanho para o pasto, pela manhã, associa cada animal a uma pequena pedra guardada em seu alforje e, ao acomodá-los no estábulo, ao final do dia, confere cada animal que vê entrando com uma pedra inicialmente armazenada.

Claro que, ao notar ter entrado o último animal, e ainda sobrando pedras, ele saberá que algum ficou para trás, e voltará ao campo para resgatá-lo. Ou então, um senhor feudal que, ao avaliar o efetivo do exército de seu oponente, percebe que negociar será mais vantajoso que guerrear. Além dessas, há inúmeras outras situações em que a presença dos números ou pelo menos de tal ideia é indispensável.

Está curioso? Quer expandir seus conhecimentos? Saiba mais em:

Aragão, História da Matemática.

Zanardini: Um breve Olhar sobre a História da Matemática.

1.1.2 Conjunto dos números naturais: $\mathbb{N}$

$\mathbb{N}$

Os números naturais, como o nome sugere, surgem “naturalmente” pela observação do ser humano da realidade que o rodeia. Eles são designados pela notação $\mathbb{N}$ e representados por:

$$\mathbb{N} = \{0,1,2,3,4,5,\dots\}$$

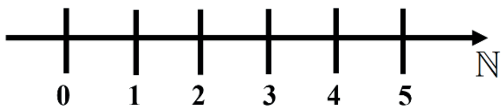
Um subconjunto importante do conjunto $\mathbb{N}$ é o conjunto $\mathbb{N}^*$, conjunto dos números naturais *não nulos*, indicamos por: $\mathbb{N}^* = \{1,2,3,4,5,\dots\}$. Note que o **zero foi excluído** do conjunto $\mathbb{N}$.

Fique atento

O asterisco **(*)** ou *estrela* indica que o *zero* não é elemento de um conjunto

Representação do conjunto dos números naturais na reta: note que, entre dois naturais consecutivos, não há nenhum outro número natural; entre eles há um *vazio*.

Representação dos números Naturais na reta real



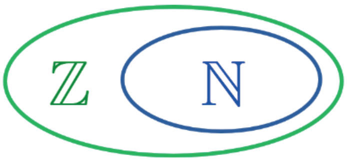
Fonte: Armando Antonio Monteiro de Castro

Demana : página 3

Boulos: página 51

Observe que qualquer número natural, somado a outro natural, resultará em um número natural. Já a diferença entre dois naturais nem sempre será outro número natural, daí a necessidade de um novo conjunto que abrigasse esse possível resultado. Surge o conjunto dos números inteiros.

1.1.3 Conjunto dos números inteiros: $\mathbb{Z}$



O conjunto dos números inteiros é definido e representado por $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$. Note que o conjunto $\mathbb{N}$ é subconjunto de $\mathbb{Z}$, ou seja, $\mathbb{N}$ está contido em $\mathbb{Z}$, matematicamente, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, ou $\mathbb{Z}$ contém $\mathbb{N}$, matematicamente $\mathbb{Z} \supset \mathbb{N}$.

Temos também como subconjuntos de $\mathbb{Z}$:

$\mathbb{Z}^*$= conjunto dos inteiros não nulos, ou seja: $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} - \{0\} = \{\ldots -3, -2, -1, 1, 2, 3, \ldots\}$

$\mathbb{Z}_+$= conjunto dos inteiros não negativos: $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$. Note que $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N}$

$\mathbb{Z}_-$= conjunto dos inteiros não positivos: $\mathbb{Z}_- = \{0, -1, -2, -3, -4 \ldots\}$

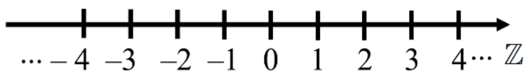
$\mathbb{Z}_+^*$= conjunto dos inteiros positivos: $\mathbb{Z}_+^* = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$. Note que $\mathbb{Z}_+^* = \mathbb{N}^*$

$\mathbb{Z}_-^*$ = conjunto dos inteiros negativos: $\mathbb{Z}_-^* = \{-1, -2, -3, -4 \ldots\}$

Asterisco (*) remove o zero.
O sinal de (+) remove os negativos (–).

Representação do conjunto dos números inteiros na reta: note que entre dois inteiros consecutivos não há nenhum outro número inteiro, portanto, entre eles há um *vazio*.

Representação dos números Inteiros na reta real



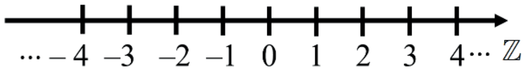
Fonte: Armando Antonio Monteiro de Castro

Fique atento

Asterisco (*) remove o zero.
O sinal de (+) remove os negativos (–).

Representação do conjunto dos números inteiros na reta: note que entre dois inteiros consecutivos não há nenhum outro número inteiro, portanto, entre eles há um *vazio*.

Representação dos números Inteiros na reta real



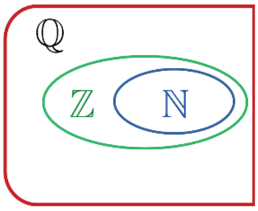
Fonte: Armando Antonio Monteiro de Castro

Demana : página 3

Boulos: página 51

Com o conjunto dos números inteiros, qualquer operação de soma, subtração e multiplicação entre eles será possível, resultando em outro número inteiro. O problema agora é que, nem sempre, a divisão entre dois inteiros quaisquer resulta em outro inteiro. Por exemplo: como fazer a “continha” $3 \div 2$, tendo somente que trabalhar com os inteiros? Novamente outro conjunto “surge” para resolver o problema, o conjunto dos números racionais.

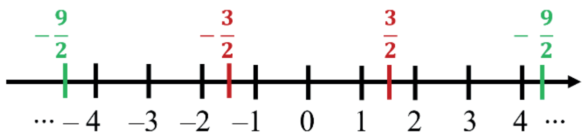
1.1.4 Conjunto dos números racionais: $\mathbb{Q}$



Os **números racionais** são todos os números que podem ser colocados na *forma de uma fração*, onde o numerador $\in \mathbb{Z}$ e o denominador $\in \mathbb{Z}^*$, ou seja, o conjunto dos **números racionais** é a união do conjunto dos números inteiros, com as frações positivas e negativas, e é indicado por:

$$\mathbb{Q} = \{x | x = \frac{a}{b} \text{, onde } a \text{ e } b \in \mathbb{Z} \text{ e } b \neq 0\}$$

Alguns números racionais na reta



Fonte: Armando Antonio Monteiro de Castro

Note que, enquanto o conjunto dos números naturais e o conjunto dos números inteiros foram representados pelos seus elementos, o conjunto dos racionais é representado por uma *característica de seus elementos*, pois entre dois racionais quaisquer existem *infinitos* outros, impossibilitando sua representação na reta ou na notação de conjunto, elencando seus elementos, como foram representados os naturais e os inteiros.

Demana

Boulos

É interessante observar que todo ***decimal exato*** ou ***periódico*** -*dizima periódica* – pode ser representado na forma de uma fração, portanto pertencerá ao conjunto dos números racionais. Note também que o conjunto dos números naturais está contido (símbolo $\subset$) no conjunto dos números inteiros, e que estes estão contidos no conjunto dos números racionais, portanto todo número inteiro e, consequentemente natural, pertencerá ao conjunto dos números racionais, pois ambos podem ser postos na forma de fração. As dízimas periódicas são os decimais não exatos. São números em que a parte decimal se repete indefinidamente, por exemplo, o número 0,333... , que é o resultado da divisão entre os inteiros 1 e 3, ou seja, $\frac{1}{3}$. Dizemos que a fração $\frac{1}{3}$ é a geratriz da dízima periódica 0,333...

Fique atento

Os "pontinhos" indicam que o número três está se repetindo indefinidamente.A repetição de números também pode ser indicada por uma "barra" sobre o número ou números que se repetem; veja só $0{,}1\overline{27}$ (quem se repete é o 27).

1.1.5 Conjunto dos números irracionais *I* ou $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$

I

Os números irracionais são aqueles que *não podem ser postos na forma de fração*, formando um conjunto à parte dentro do conjunto dos reais. Geralmente aparecem quando trabalhamos com conceitos geométricos, ao estudarmos as formas, ou então ao mensurarmos as *coisas* do mundo real.

Os irracionais, como o nome sugere, fogem à razão. Aqui, podemos intuir duas abordagens: uma como sendo aqueles que não podem ser postos na forma de divisão que, em matemática, significa *razão*; a outra pode significar que, dado o momento de sua percepção, eles fogem à capacidade de entendimento vigente a época. Particularmente, prefiro a segunda, mais poética. Veja só:

Não é comum entrar em uma padaria e pedir $3\sqrt{7}$ *pães. Faça o teste! Se o atendente tiver algum conhecimento matemático e entender o chiste (dê um Google), certamente ele entregará a você seis pães inteiros e um mordido (eu faria isso...).*

Podemos definir números irracionais da seguinte forma: Os **números irracionais** são os decimais **não exatos** e **não periódicos**, ou seja, são os números que **não podem ser escritos na forma de fração** (*divisão de dois inteiros*). Como exemplo de números irracionais, temos: $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt[5]{7}$ ou qualquer outra raiz **não exata**, além dos famosos números "π" (pi) , que vale 3,1415926535... e o número "e" (número de Euler/Neper), que vale 2,718...

Como foi dito, comumente nos depararemos com esse tipo de número, quando trabalharmos com conceitos geométricos, estudando as formas que nos rodeiam, mensurando-as, ou seja, determinando superfícies, volumes, comprimento de arcos, distâncias e outros.

Quer conhecer um paradoxo, uma dicotomia envolvendo os números irracionais e o conceito de infinito ... infinito, porém, limitado?

Seja feliz! Espiral de Teodoro (sec. IV A.C):

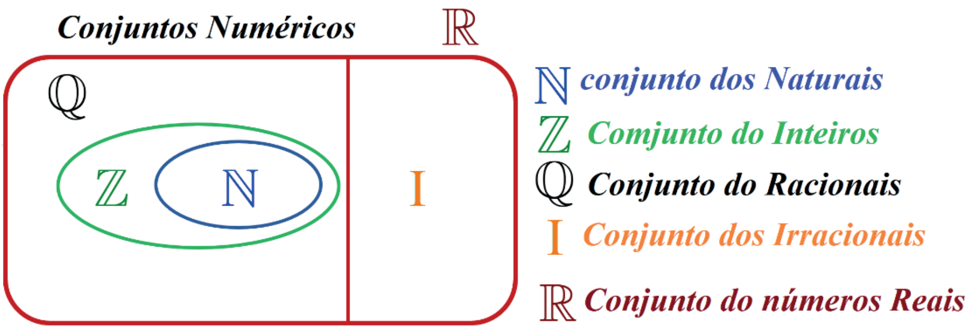
Veja, usando o Geogebra, como determinar a exata posição de um irracional na reta real.

Saiba mais sobre o número π:

Saiba mais sobre o número e

1.1.6 Conjunto dos números Reais: $\mathbb{R}$

Definidos os conjuntos dos números Racionais ($\mathbb{Q}$) e dos Irracionais (I), podemos agora definir o conjunto dos números reais como sendo a *união desses dois conjuntos*. Matematicamente, indicamos por: $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup I$. O diagrama mostra a relação entre os conjuntos numéricos que formam o que chamamos de **Corpo dos Números Reais**:
Diagrama representando o conjunto dos números reais



Fonte: Armando Antonio Monteiro de Castro

Desse modo, os números *naturais*, os *inteiros*, os *racionais* e os *irracionais* são todos números **reais**. Agora, qualquer operação de soma, subtração, multiplicação e divisão entre números reais quaisquer resultarão em um número real. Assim, dizemos que o conjunto dos reais é *fechado* para tais operações.

Como subconjuntos importantes de $\mathbb{R}$, temos:

$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$ conjunto dos reais não nulos

$\mathbb{R}_+$ = conjunto dos números reais não negativos

$\mathbb{R}_-$= conjunto dos números reais não positivos

$\mathbb{R}_+^*$ = conjunto dos reais positivos

$\mathbb{R}_-^*$ = conjunto dos reais negativos

Fique atento

Asterisco (*) remove o zero
O sinal de (+) remove os negativos (–)
Entre dois números reais quaisquer existem infinitos outros números reais, o que deixa a reta real ***densa***, ou seja, não há ***vazios*** entre números reais.

A reta real com todos os números reais compreendidos entre os números *a* e *b,* **inclusive**.

Fonte: Armando Antonio Monteiro de Castro

Note que, no intervalo entre *a* e *b, inclusive a* e *b*, a reta é ***densa***, ou seja, todos os infinitos números reais compreendidos entre *a* e *b* estão presentes na reta, cada um ocupando seu exato local; **não há vazios**, pois, **entre dois reais quaisquer**, **existem infinitos outros**.

Com o conjunto dos números reais, ficamos satisfeitos por um tempo, mas, "como tudo que é bom dura pouco", surge um novo problema, como resolver a questão: qual o número real que, elevado ao quadrado, resulta em menos 4? Matematicamente: $x^2 = -4$? ou $\sqrt{-4}$? , que são ideias correlatas. De novo, mentes brilhantes entram em ação e resolvem o dilema, após duzentos anos, mas essa conversa fica para o final, quando estudarmos os números *Complexos*.

Ficou curioso? Não quer esperar? Quer saber um pouco mais sobre os Complexos?

Então, siga o link e seja feliz!

Petroli: página 29

1.2 Representação dos números reais na reta: relação de ordem e valor absoluto

Cada número real tem sua exata e única posição, ao que chamamos de *reta real*. É o que veremos a seguir.

1.2.1 Relação de ordem entre os números reais

Dados dois números quaisquer a e b, pertencentes a $\mathbb{R}$, somente uma das três opções é possível:

$$a = b \quad \text{ou} \quad a > b \quad \text{ou} \quad a < b$$

A desigualdade representada por $a < b$ significa que o número real a é menor que o número real b, o que nos leva a intuir que existe uma relação de ordem no conjunto dos reais, estabelecendo comparações do tipo: *menor que*, *maior que*, *igual a*.

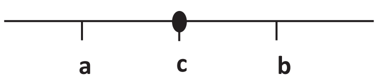
Geometricamente, se $a < b$, então a está situado à esquerda de b na reta real.

A desigualdade representada por $a > b$ significa que o número real a é maior que onúmero real b.

Geometricamente, se $a > b$, então a está situado à direita de b na reta real.

Podemos escrever também $a \leq b$ (lê-se: a é menor ou igual a b) ou $a \geq b$ (lê-se: a é maior ou igual a b).

Um número real c estará entre a e b *se, e somente se*, $a < c$ e $c < b$, que representamos com uma dupla desigualdade, também chamada de *inequação simultânea* : $a < c < b$.



1.2.2 Valor absoluto do número real

Valor absoluto ou módulo de um número real é a *quantidade* que ele representa, matematicamente:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$$, cuja leitura deve ser:

Valor absoluto ou módulo de um número será o próprio número, se ele não for negativo, e, *valor absoluto ou módulo de um número será menos o número, se ele for negativo*. Podemos entender também o *módulo* como sendo a *distância do número até a origem*, ao que chamamos de **definição geométrica de módulo**.

Fique atento

Note que: *valor absoluto* ou *módulo* pressupõe a *simetria* do número em relação à origem, ou "zero".

É errado dizer que: "*valor absoluto é sempre positivo*" ... veja que: $|0| = 0$, e zero não é positivo.

1.3 Intervalos Numéricos: notações e operações

Denominamos *intervalo numérico* qualquer subconjunto do conjunto dos números reais; assim, dados dois números reais *a* e *b*, com *a* < *b*, temos:

a) intervalo aberto 

Representação algébrica:

$\{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$ ou (a, b) ou **]a,b[**

A *bolinha aberta* indica que os extremos *a* e *b não pertencem ao intervalo*. Esse intervalo contém todos os números reais compreendidos entre *a* e *b*, *exclusive a* e *b*.

b) intervalo fechado 

Representação algébrica:

$\{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}$ ou **[a,b]**

A *bolinha fechada* indica que os extremos *a* e *b pertencem ao intervalo*. Esse intervalo contém todos os números reais compreendidos entre *a* e *b*, *inclusive a* e *b*.

c) intervalo semiaberto à direita 

Representação algébrica:

$\{x \in \mathbb{R} | a \leq x < b\}$ ou **[a, b)** ou **[a, b[**

d) intervalo semiaberto à esquerda 

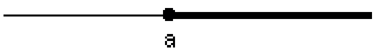
Representação algébrica:

$\{x \in \mathbb{R} | a < x \leq b\}$ ou **(a, b]** ou **]a, b]**

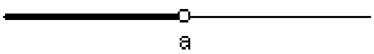
Podemos ter ainda intervalos com as seguintes características, onde o símbolo "∞" significa *infinito*:

Se: $-\infty$, lemos "*menos infinito*", os números seguem para a esquerda, e $+\infty$, lemos "*mais infinito*", os números seguem para a direita.

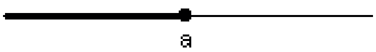
$\{x \in \mathbb{R} | x > a\}$ ou **(a, + ∞)** ou **] *a*, + ∞[**



$\{x \in \mathbb{R} | x \geq a\}$ ou **[a, + ∞)** ou **[*a*, + ∞[**



$\{x \in \mathbb{R} | x < a\}$ ou **(-∞, a)** ou **]– ∞ , *a* [**



$\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R} | \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{a}\}$ ou **] – ∞ , *a*]**

Fique atento

Notações de intervalo**:** **[ ]** inclui os extremos, **] [** exclui os extremos ou ainda, **(a,b)** exclui os extremos. Não é muito recomendada, pois, eventualmente, pode causar confusão com *coordenadas de um ponto*.

Petroli:
página 10

Demana:
página 04

Boulos:
página 51

1.4 Aprendendo:

1. Determinar a fração equivalente a:

a) 0,888...   b) 0,4777...   c) $2,\overline{741}$

Resolução

2. Associe cada item aos conjuntos: **Irracional** (**1**), **Racional** (**2**) :

a) 0,03 ( )   b) $(\sqrt{\mathbf{2}} + \mathbf{2}) + (\sqrt{\mathbf{2}} - \mathbf{2})$ ( )   c) 0.444... ( )

d) $a \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q}); b \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \Rightarrow (a.b) \in$ ( )

Resolução

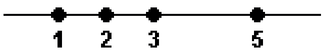
3. Represente, na reta real, os seguintes intervalos numéricos:

a) $[\ 2, 8[$ b) $]-8; 2]$ c) $\{x \in \mathbb{R} | 3 < x \leq 7\}$ d) $\{x \in \mathbb{R} | x \geq -2\}$

Resolução

4. Escreva os conjuntos representados nas retas abaixo, usando a *notação de conjunto* e a *notação de intervalo*:

a) 

b) 

c) 

Resolução

1.5 Síntese da Unidade:

Nesta Unidade, estudamos o conjunto dos números *Reais* e seus subconjuntos: os *Naturais*, os *Inteiros*, os *Racionais* e os *Irracionais*, suas particularidades e algumas propriedades. Será a partir desse conhecimento que iremos trabalhar com modelos matemáticos que nos permitam entender e explicar os fenômenos do mundo real, efetuando contagens e mensurações. A importância em bem conhecê-los implica diretamente na veracidade dos resultados obtidos, quando da busca de melhor entendermos o mundo que nos rodeia e, principalmente, ao efetuarmos proposições para alteração dessa realidade.

1.6 Para Saber Mais:

Demana: Pré-Cálculo Ed. Pearson:

https://plataforma.bvirtual.com.br/Acervo/Publicacao/21

Boulos: Pré-Cálculo Ed. Pearson:

https://plataforma.bvirtual.com.br/Acervo/Publicacao/177839

Aragão: História da Matemática Ed. Interciência:

https://plataforma.bvirtual.com.br/Acervo/Publicacao/123775

Carl Boyer: História da Matemática Ed.Blucher: SIBI UNITAU

1.7 Praticando:

1. Represente na reta real os intervalos numéricos:

a) $[-6;-1[$ b) $\{x \in \mathbb{R} | 2 \leq x \leq 5\}$ c) $\{x \in \mathbb{R} | x < 1\}$

d) $\{x \in \mathbb{R} | -1 < x < 4\}$

2. Como representar na reta real a inequação ou a desigualdade $|x-5| < 1$?

3. A intersecção de dois conjuntos pressupõe um novo conjunto formado pelos elementos comuns entre ambos. Assim, represente como um único intervalo o conjunto

$A = [3,8[\cap]5,9]$.

4. Sabe-se que as vacinas em desenvolvimento contra o COVID 19 têm eficácia em temperaturas específicas. A da Universidade de Oxford mantém-se em temperaturas entre 2ºC a 8ºC, a da empresa Pfizer necessita de – 70ºC e a da empresa Moderna permanece estável por seis meses a 20ºC abaixo de zero e, durante 30 dias em geladeiras, desde que entre 2ºC e 8ºC. Represente, usando notação de intervalo, as temperaturas adequadas para cada uma delas.

5. Em uma pesquisa de mercado, constatou-se que 15 pessoas assistem ao canal A ou B, sendo que algumas delas assistem a ambos os canais. Sabe-se que 12 delas assistem ao canal A e 10 delas assistem ao canal B. Qual o número de pessoas que assistem a ambos os canais?

6. O número $\pi - \sqrt{2}$ está contido em qual dos intervalos?

a) $[\mathbf{1}, \frac{3}{2}]$ b) $]\frac{1}{2}, \mathbf{1}]$ c) $[\frac{3}{2}, \mathbf{2}]$ d) $[-\frac{3}{2}, \mathbf{0}[$ e) $]-\mathbf{1}, \mathbf{1}[$

7. Em matemática, dizemos que um conjunto é *fechado* para determinada operação quando seu *resultado pertence ao conjunto*. Para quais operações podemos considerar o conjunto dos números naturais e inteiros não fechados?

8. Dê, por extensão (*enumerando seus elementos*), os seguintes conjuntos:

a) $A = \{x | x = 2k$, com $k \in \mathbb{N}$ e $k < 10\}$

b) $B = \{x \in \mathbb{R} | -5 < x \leq 3\}$

c) $C = \{x \in \mathbb{Z} | -5 < x \leq 3\}$

d) $D = \{x \in \mathbb{Z} | \; |x| < 4\}$

9. Dados os conjuntos A = {2, 3, 4, 5, 6} e B = {2, 4, 6}, utilizando os símbolos $\in$, $\notin$, $\subset$, $\not\subset$, $\supset$ e $\not\supset$ estabeleça as relações abaixo:

a) 2 ___ A b) A ___ N c) 4 ___ B d) A ___ B

e) B ___ A f) {2} ___ A g) 1 ___ B h) {3, 4} ___ A

10. Sendo $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x \leq 3\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x \leq 5\}$, determine:

a) $A \cap B =$ b) A $\cup$ B = c) $A - B =$ d) $B - A =$

Obs.: dê a resposta em notação de *conjunto*, *intervalo* e na *reta*

Unidade II

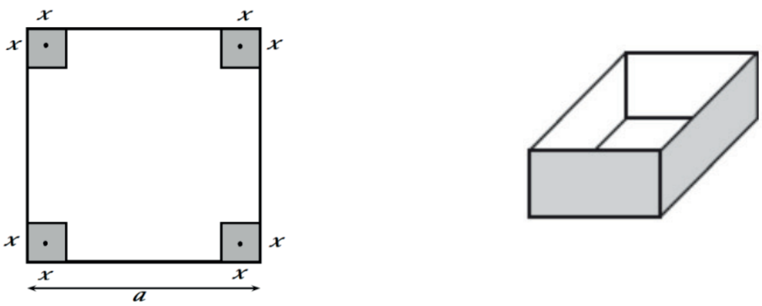
Polinômios, Produtos Notáveis, Fatoração e Simplificação de Frações Algébricas

Nesta Unidade, estudaremos os polinômios – expressões matemáticas empregadas para modelar o mundo que nos rodeia. Modelamento matemático é a técnica matemática utilizada para representar fenômenos e situações operacionais do mundo real através de sentenças matemáticas, recheadas de números e letras, onde os números expressam grandezas e as letras, as incógnitas a serem determinadas. Um exemplo de modelamento matemático e computacional pode ser dado pelas expressões que descrevem os movimentos de um braço robótico que executa soldas em um carro. Dependendo das características dessas sentenças matemáticas, tem-se os polinômios, cuja definição será dada logo a seguir. Portanto, vamos aprender a identificá-los, e, se transformados em equações, resolvê-los. Revisaremos as regras usuais das operações com essas entidades matemáticas, tais como: adição, subtração, multiplicação, divisão, dentre outras. A importância desse aprendizado se relaciona intrinsecamente com a precisão do modelamento matemático desejado, do conhecimento das regras operacionais que envolvem os polinômios, bem como do encontro da solução almejada para um eventual problema.

2.1 Polinômios: Definição e grau de polinômios

Vejamos um problema comum do Cálculo Diferencial e Integral quando do estudo de "problemas de otimização": um fabricante de embalagens deseja construir uma caixa, sem tampa, a partir de uma chapa de papelão quadrada de medida "*a*" de modo que, pronta, ela comporte "volume máximo". Para tanto, ele cortará quadrados nos quatro cantos da chapa e, após o corte, dobrará suas laterais perpendicularmente à base de modo a formar a caixa. Supondo que a operação não gere perdas de material, qual deve ser a medida do corte para que o volume da caixa seja o maior possível?

Chapa com a indicação de corte e a caixa já montada



Fonte: Elaborado pelo autor.

O volume da caixa será dado por: área da base x altura:

$$V = x(a-2x)(a-2x) \quad \Rightarrow V = x(a-2x)^2 \Rightarrow V = x(a^2 - 4ax + 4x^2)$$
$$\therefore V(x) = 4x^3 - 4ax^2 + a^2x$$

Note que o volume depende da variável *x*, pois *a* é um valor fixo. A solução desse problema será estudada na disciplina Cálculo Diferencial e Integral, ao final da Unidade "derivadas". O que importa nesse momento é que a expressão $V(x) = 4x^3 - 4ax^2 + a^2x$, trabalhada adequadamente, fornecerá a resposta do problema, modelado segundo um *polinômio de grau 3*.

Está curioso? Ficou ansioso? Quer saber já? Calma, respira, respira, que passa ...

Siga o link e seja feliz: Vídeo com a solução do problema da caixa.

Podemos definir um polinômio como sendo uma soma algébrica de monômios, que são os chamados *termos* do polinômio. Veja só: $4x^2 - 2x + 3$ é um *polinômio de segundo grau*, maior expoente presente é dois, constituído de três termos ou monômios, podendo ser chamado também de *trinômio de segundo grau*. Aos números 4 , – 2 e 3 chamamos de *coeficientes* ou *fatores*; x é chamado de *variável*.

2.1.1 Definição formal de Polinômio com Uma Variável Real

É toda expressão matemática escrita na forma:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x^1 + a_0 \text{ , onde:}$$

x é a *variável* e $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$, que denominamos *coeficientes*, e $n \in \mathbb{N}$.

2.1.2 Igualdade entre polinômios

Dizemos que dois polinômios são iguais quando iguais forem seus respectivos coeficientes. Veja só:

Sejam: $P(x) = 5x^4 - 3x^2 + x - 2$ e $D(x) = ax^4 + bx^2 - cx + d$, $P(x) = D(x)$

$$\text{se, e somente se: } \begin{cases} a = 5 \\ b = -3 \\ -c = 1 \\ d = -2 \end{cases}$$

2.1.3 Soma e Subtração de Polinômios

Para somarmos ou subtrairmos polinômios, somamos ou subtraímos os coeficientes dos termos de mesmo expoente, ou seja, os *termos semelhantes*.

Dados $P(x) = 5x^4 - 3x^2 + x - 2$ e $D(x) = ax^4 + bx^2 - cx + d$, calcule $P(x) + D(x)$.

Solução:

$$P(x) + D(x) = (5x^4 - 3x^2 + x - 2) + (ax^4 + bx^2 - cx + d)$$
$$\therefore P(x) + D(x) = (5 + a)x^4 + (b - 3)x^2 + (1 - c)x + (d - 2)$$

2.1.4 Multiplicação de Polinômios

Ao multiplicarmos polinômios, aplicamos a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição ou subtração. Recomenda-se fortemente usar o "*dispositivo prático*". Veja só:

Dados $P(x) = -x^2 + 2x + 3$ e $D(x) = x - 4$, determine $P(x) \cdot D(x)$.

Solução:

$$\begin{array}{r} -x^2 + 2x + 3 \\ x - 4 \\ \hline -x^3 + 2x^2 + 3x \quad\quad \\ -4x^2 - 8x - 12 \\ \hline -x^3 - 2x^2 - 5x - 12 \end{array}$$

Note que, ao usarmos o dispositivo prático, os termos semelhantes, aqueles de mesmo expoente, são de fácil percepção e agrupamento. Caso você opte por fazer a distributiva "*na* *horizontal*", haverá necessidade de agrupamento dos termos semelhantes, que não estarão tão perceptíveis como no dispositivo prático. Lembre-se também de que ao multiplicarmos potências de mesma base, mantemos a base e somamos os expoentes.

2.1.5 Divisão de Polinômios

A divisão entre polinômios se dá por meio de um algoritmo, conhecido como "*método da chave"*, que simula a divisão entre números quaisquer.

Fique atento

Algoritmo: processo, "*jeitão*" pelo qual efetuamos certos procedimentos matemáticos, de modo a facilitar as continhas.... de maneira formal: conjunto das regras e procedimentos lógicos claramente definidos que nos levam à solução de um problema, em um número finito de etapas.

Veja só:

Dados $P(x) = -x^2 + 2x + 3$ e $D(x) = x - 4$, determine $P(x) \div D(x)$.

Solução:

$$
\begin{array}{l|l}
-x^4 + 0x^3 + 2x^2 + 0x + 3 & x^2 - 4 \\ \cline{2-2}
 & -x^2 - 2 \\
+x^4 \qquad - 4x^2 & \\ \cline{1-1}
\qquad - 2x^2 + 0x + 3 & \\
\qquad +2x^2 \qquad - 8 & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad\qquad - 5 &
\end{array}
$$

Portanto, $P(x) \div D(x)$ resulta no polinômio quociente $Q(x) = -x^2 - 2$ e no polinômio resto $R(x) = -5$. Podemos dar a resposta na forma: $P(x) \div D(x) = -x^2 - 2 + \frac{-5}{x^2-4}$.

Note que a divisão produziu resto – 5. Caso o resto fosse zero, diríamos que *P(x)* é *divisível* por *D(x)*.

Note também que: $P(x) = Q(x) \cdot D(x) + R(x)$, ou seja: $P(x) = (-x^2 - 2) \cdot (x - 4) - 5$

2.1.6 MMC entre Polinômios

Fatorados os polinômios, o mínimo múltiplo comum entre eles será dado pelo produto de seus fatores comuns e não comuns, tomados com seus maiores expoentes.

Demana Página 23

Demana Página 23

Boulos Página 26

2.2 Produtos Notáveis

Ao trabalharmos com expressões algébricas, é bastante comum o aparecimento de certos *produtos recorrentes*, cuja resposta pode ser perceptível sem que tenhamos que efetuar a multiplicação para sabê-la; são os "*produtos notáveis*". Para facilitar o estudo, vamos dividi-los em casos:

2.2.1 Caso: Produto da Soma pela Diferença de dois termos: $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$

O produto resulta em: "*o quadrado do primeiro termo menos o quadrado do segundo termo*".
Veja só: $(x + 4) \cdot (x - 4) = x^2 - 16$ multiplique os polinômios e verifique a resposta

2.2.2 Caso: Quadrado da Soma de dois termos: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

O produto resulta em: "*quadrado do primeiro termo, mais duas vezes o 1º pelo 2º termo, mais o quadrado do segundo termo*". Note que: $(a + b)^2 = (a + b)(a + b)$

2.2.3 Caso: Quadrado da Diferença de dois termos: $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

O produto resulta em: " *quadrado do primeiro termo, menos duas vezes o 1º pelo 2º termo, mais o quadrado do segundo termo*". Note que: $(a-b)^2 = (a-b)(a-b)$

2.2.4 Caso: Cubo da Soma de dois termos: $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

O produto resulta em: "*cubo do primeiro termo, mais três vezes o quadrado do 1º termo pelo 2º termo, mais três vezes o 1º termo pelo quadrado do 2º termo, mais o cubo do segundo termo*".
Note que: $(a+b)^3 = (a+b)(a+b)(a+b)$

2.2.5 Caso: Cubo da Diferença de dois termos: $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

O produto resulta em: "*o cubo do primeiro termo, menos três vezes o quadrado do 1º termo pelo 2º termo, mais três vezes o 1º termo pelo quadrado do 2º termo, menos o cubo do 2º termo*".
Note que: $(a-b)^3 = (a-b)(a-b)(a-b)$

2.2.6 Caso: Quadrado da Soma Três termos: $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc)$

O produto resulta em: "*a soma dos quadrados dos três termos, mais duas vezes a soma do produto do 1º termo pelo 2º, do 1º termo pelo 3º e do 2º termo pelo 3º termo*".

Note que: $(a+b+c)^2 = (a+b+c)(a+b+c)$

2.2.7 Caso: Produto de Stevin

Também conhecido como "*produto de* $(x+p)$ *por* $(x+q)$". O produto resulta em: x^2 mais a soma de p com q, vezes x, mais o produto de p por q.

$$(x+p)(x+q) = x^2 + (p+q)x + pq$$

Claro que você não precisa sabê-los todos, pois basta efetuar o produto entre os polinômios envolvidos para obter a resposta; porém, sabê-los facilitará muito ao fazer as continhas ...Portanto, se empenhe.

2.2.8 Exemplos Resolvidos

1. $(2x+3)\cdot(2x-3) = (2x)^2 - 3^2 = 4x^2 - 9$
2. $(x+5)^2 = x^2 + 2\cdot x\cdot 5 + 5^2 = x^2 + 10x + 25$
3. $(x-7)^2 = x^2 - 2\cdot x\cdot 7 + 7^2 = x^2 - 14x + 49$
4. $(x+2)^3 = x^3 + 3\cdot x^2\cdot 2 + 3\cdot x\cdot (2)^2 + (2)^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$
5. $(a-1)^3 = a^3 - 3\cdot a^2\cdot 1 + 3\cdot a\cdot (1)^2 - (1)^3 = a^3 - 3a^2 + 3a - 1$
6. $(x-5)\cdot(x+2) = x^2 - 3x - 10$
7. $(x-7)\cdot(x-4) = x^2 - 11x + 28$
8. $(x-2+y)^2 = x^2 + 4 + y^2 + 2(-2x + xy - 2y)$
   $\therefore (x-2+y)^2 = x^2 + 4 + y^2 - 4x + 2xy - 4y$

Demana Página 23

Boulos Página 26

Petreli: Página 19

2.2.9 Fatoração:

Fatorar é transformar somas e subtrações em produto. A fatoração por si só não tem grande significado, mas é de suma importância nas operações com os polinômios, principalmente na *simplificação de frações algébricas*. Para facilitar o estudo, vamos dividi-la em casos.

2.2.9.1 Fator Comum em Evidência

Quando uma expressão algébrica é formada de parcelas, sendo que *um mesmo fator* aparece em todas elas (*fator comum*), podemos pô-lo em evidência. Veja: $ax + bx = x\cdot(a+b)$. É interessante notar que a soma foi transformada em um produto, objetivo final da fatoração. Observe os exemplos:

a) $2a + 2b = 2(a + b)$

b) $3a^4x^2 - 9a^3x^3 + 3a^2x^4 = 3a^2x^2(a^2 - 3ax + x^2)$

2.2.9.2 Agrupamento

É aplicado quando não há fator comum a todas as parcelas, somente a algumas delas. Veja só:$mx + px + my + py$; nota-se que x é fator comum aos dois primeiros termos e y é fator comum aos dois últimos termos, então podemos escrever:

$$mx + px + my + py = x \cdot (m + p) + y \cdot (m + p)$$

Observando que $(m + p)$ é fator comum aos dois termos, podemos pô-lo em evidência, escrevendo:

$$mx + px + my + py = x(m+p)+y(m+p)=(m + p) \cdot (x + y)$$

$$\Rightarrow mx + px + my + py = (m + p) \cdot (x + y)$$

Mais um exemplo do caso:

$$6p^2 - 4pq - 9rp + 6rp = 2p \cdot (3p - 2q) - 3r \cdot (3p - 2q) = (3p - 2q) \cdot (2p - 3r)$$

2.2.9.3 Diferença de Dois Quadrados: $a^2 - b^2$

Sabemos que: $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$, então, pela propriedade simétrica temos que:

$$a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$$

Fazemos: "raiz quadrada do 1º termo mais raiz quadrada do 2º termo, vezes raiz quadrada do 1º termo menos raiz quadrada do 2º termo

Veja só: $4x^2 - 25 = (2x)^2 - 5^2 = (2x + 5) \cdot (2x - 5)$

2.2.9.4 Trinômio Quadrado Perfeito: $a^2 + 2ab + b^2$ ou $a^2 - 2ab + b^2$

Note que para aplicarmos o caso em questão, precisamos ter três termos no polinômio, de modo que os extremos sejam quadrados perfeitos, e o termo do meio seja o dobro do produto da raiz quadrada do primeiro termo pela raiz quadrada do segundo termo. Então teremos que a fatoração do trinômio quadrado perfeito resultará em:

$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ e $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$

Veja só: a) $4x^2 + 12x + 9 = (2x + 3)^2$ b) $x^2 - 10x + 25 = (x - 5)^2$

2.2.9.5 Trinômio do Segundo grau: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

O trinômio de segundo grau $ax^2 + bx + c$, fatorado, gera o produto: $a(x - x_1)(x - x_2)$, onde: a é coeficiente do termo x^2 e, x_1 e x_2 as raízes do trinômio, obtidas por:

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Veja só: $x^2 - 6x + 8 = 1 \cdot (x - 2) \cdot (x - 4)$

Quer saber como encontrar raízes trinômio de 2º grau de modo fácil e rápido? Para isso vamos usar as relações de Girard, também conhecida como "Soma e Produto".

Siga o link e seja feliz...

2.2.9.6 Diferença de Cubos e Soma de Cubos: $a^3 - b^3$ e $a^3 + b^3$

A fatoração da diferença de cubos e soma de cubos será dada, respectivamente, por:

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^3) \quad \text{e} \quad a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

Demana Página 23

Boulos Página 26

Petreli: Página 19

2.3 Frações Algébricas

Definimos frações algébricas as frações onde o *numerador* e o *denominador* são expressões envolvendo polinômios. Veja só: $\frac{x^2-y^2}{3y}$, $\frac{x^2-2x+1}{x^2-1}$

Fique atento

O denominador de uma fração jamais pode ser zero; caso a variável assuma tal valor, ele deve ser excluído da resposta.

2.3.1 Propriedade Fundamental

Ao multiplicamos ou dividimos o numerador e o denominador de uma fração algébrica por um mesmo polinômio, obtemos uma fração *equivalente* à anterior. Veja só:

a) $\frac{3x}{2y} = \frac{3x}{2y} \cdot \frac{5a}{5a} = \frac{15ax}{10ax}$

b) $\frac{3a^2b}{18a^3b} = \frac{3a^2b}{18a^3b} \div \frac{3a^2b}{3a^2b} = \frac{1}{6a}$

Como consequência desta propriedade, temos que:
Quando o *numerador* e o *denominador* forem iguais, a fração é igual a 1.

Veja: $\frac{5xy}{5xy} = \frac{\cancel{5xy}}{\cancel{5xy}} = 1$

Trocar o sinal do numerador e do denominador é o mesmo que *multiplicar ambos por –1*.

$$\frac{-a+b}{-3x} = \frac{(-a+b)\cdot(-1)}{(-3x)\cdot(-1)} = \frac{a-b}{3x}$$

2.3.2 Simplificação de Frações Algébricas

Só será possível a simplificação de uma fração algébrica quando o numerador e o denominador apresentarem *fatores comuns* (*muito útil em Cálculo I*).

Veja só:

a) $\dfrac{12a^2bx^2}{8ax^3} = \dfrac{\cancel{12} \cdot \cancel{a} \cdot a \cdot b \cdot \cancel{x^2}}{\cancel{8} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{x^2}\, x} = \dfrac{3ab}{2x}$

b) $\dfrac{x^2 - y^2}{x - y} = \dfrac{(x+y) \cdot \cancel{(x-y)}}{\cancel{x-y}} = x + y$

c) $\dfrac{2x}{2x+2} = \dfrac{\cancel{2} \cdot x}{\cancel{2} \cdot (x+1)} = \dfrac{x}{(x+1)}$

d) $\dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 2x + 1} = \dfrac{\cancel{(x+1)} \cdot (x-1)}{(x+1)^{\cancel{2}}} = \dfrac{(x-1)}{(x+1)}$

Os cancelamentos só podem ser feitos após a fatoração, desde que haja fatores comuns ao numerador e denominador que estejam se multiplicando. Termos envolvendo uma soma ou uma subtração não podem ser simplificados.

2.3.3 Adição e Subtração de Frações Algébricas

Tira-se o *mmc* entre os *denominadores*, reduzindo-se as frações ao mesmo denominador; em seguida, efetuamos as operações indicadas no numerador e *simplificamos*, caso seja possível, a fração algébrica resultante.

Veja só:

$$\frac{2x}{x^2-1} + \frac{x-1}{x+1} = \frac{2x}{(x+1)(x-1)} + \frac{x-1}{x+1} = \frac{2x + (x-1)(x-1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{2x + (x-1)^2}{(x+1)(x-1)} = \frac{\cancel{2x} + x^2 \cancel{-2x} + 1}{(x+1)(x-1)}$$

$$\therefore \frac{2x}{x^2-1} + \frac{x-1}{x+1} = \frac{x^2+1}{x^2-1}$$

2.3.4 Multiplicação de Frações Algébricas

Inicialmente, fatoramos as frações dadas e simplificamos, em sendo possível. Em seguida, multiplicamos numerador por numerador e denominador por denominador e, a seguir, simplificamos a fração algébrica resultante.

Veja só: $$\frac{6x+6}{4ax+4x}\cdot\frac{a^2+2a+1}{x^2+x}=\frac{\cancel{6}\,\cancel{(x+1)}}{\cancel{4}x\,\cancel{(a+1)}}\cdot\frac{(a+1)^{\cancel{2}}}{x\,\cancel{(x+1)}}=\frac{3(a+1)}{2x^2}$$

$$\therefore \frac{6x+6}{4ax+4x}\cdot\frac{a^2+2a+1}{x^2+x}=\frac{3(a+1)}{2x^2}$$

2.3.5 Divisão de Frações Algébricas

Mantemos a primeira fração e multiplicamos pelo inverso da segunda, em seguida, simplificamos a fração algébrica resultante, em sendo possível.

Veja só: $$\frac{(x+y)^2}{x-y}\div\frac{x+y}{(x-y)^2}=\frac{(x+y)^{\cancel{2}}}{\cancel{x-y}}\cdot\frac{(x-y)^{\cancel{2}}}{\cancel{x+y}}=(x+y)\cdot(x-y)=x^2-y^2$$

2.3.6 Potenciação de frações algébricas

Como $\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$ (b≠0), então, para elevarmos uma expressão algébrica a determinado expoente, basta elevarmos os termos da fração a esse expoente.

Veja só: $$\left(\frac{x+y}{2x}\right)^3=\frac{(x+y)^3}{(2x)^3}=\frac{x^3+3x^2y+3xy^2+y^3}{8x^3}$$

2.4 Aprendendo

1. Efetue as operações indicadas e, sendo possível, simplifique as expressões obtidas:

a) $\frac{3a-4}{a^2-16}-\frac{1}{a-4}=$ b) $\frac{x^3-y^3}{x-y}-\frac{x^3+y^3}{x+y}=$ c) $\frac{1-a}{a}\div\left(1-\frac{1}{a^2}\right)=$

d) $\left(\frac{a+b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b}\right)\cdot\frac{a+b}{2ab}=$ e) $\frac{a^2+a}{b^2+b}\cdot\frac{a^2-a}{b^2-b}\cdot\frac{b^2-1}{a^2-1}=$

Resolução

2. Determine os valores de A, B e C para que a sentença seja verdadeira.

(útil ao Cálculo quando estudarmos "*Técnica de Integração por Frações Parciais*")

$$\frac{x^2+3x+4}{(x-1)(x+2)(x+3)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{x+3}$$

Resolução

3. Simplifique as frações algébricas, empregando os casos de fatoração estudados:

a) $\frac{x^3+1}{1-x^2}$ b) $\frac{x^2-8x+16}{x^2-16}$ c) $\frac{x^2+10x+25}{5x^2-125}$ d) $\frac{6x^2+11x+3}{2x^2-5x-12}$

Resolução

4. Desenvolva cada um dos produtos notáveis, aplicando a regra adequada:

a) $(ab - c) \cdot (ab + c)$ b) $\left(\sqrt{5} + 3\right)^2$ c) $\left(\frac{2}{5}a + x\right) \cdot \left(\frac{2}{5}a - x\right)$

d) $\left(2\sqrt{3} - 1\right) \cdot \left(2\sqrt{3} + 1\right)$ d) $(10 - ax^2) \cdot (10 + ax^2)$ e) $\left(\frac{1}{2} - a^3\right) \cdot \left(\frac{1}{2} + a^3\right)$

Resolução

2.5 Síntese da Unidade

Nesta Unidade discutimos os polinômios, a definição, as regras operatórias ou propriedades, como operar com polinômios, dentre outros assuntos. Tal conteúdo é muito importante, pois, como já dito, os polinômios são usados para descrever os fenômenos do mundo real, ou seja, é a linguagem que a matemática usa para modelar tais fenômenos e, bem conhecendo suas regras operatórias, teremos facilidade em encontrar as respostas às questões formuladas.

Livros: Biblioteca Pearson / SIBI UNITAU

Demana:
Pré-Cálculo Ed. Pearson

Boulos:
Pré-Cálculo Ed. Pearson

Petroli:
Pré-Cálculo Ed. Contentus:

2.7 Praticando

1.6 Desenvolva cada um dos produtos notáveis, aplicando a regra adequada:

a) $(2 + am)^3$ b) $(4a - 5b)^2$ c) $\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y\right)^2$ d) $\left(x^2 - \frac{1}{3}\right)^3$

e) $(2x - 3y + a)^2$

2. Sabendo-se que $a \cdot b = 3$ e $a^2 + b^2 = 19$, determine o valor de $a + b$.

3. Determine os valores de A, B e C em $\frac{9x^2-28x+12}{x^3-5x^2+6x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x-3}$ para que a sentença seja verdadeira.

4. Se $a+\frac{1}{a}=\frac{3}{5}$, qual será o valor de $a^3+\frac{1}{a^3}$?

5. Considerando a e $b \in \mathbb{R}^*$, simplifique a expressão $(a^2b+ab^2)\cdot\frac{\frac{1}{a^3}-\frac{1}{b^3}}{\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}}$.

6. Se $a\cdot b=\frac{3}{5}$ e $a+b=-12$, qual o valor da expressão $\frac{a^2b+ab^2}{a^2+2ab+b^2}$?

7. Usando o método da chave, encontre o quociente, $Q(x)$, e eventual resto, $R(x)$, da divisão entre os polinômios $P(x)=3x^5-6x^4+13x^3-9x^2+11x-1$ e $D(x)=x^2-2x+3$.

8. Usando *Briot-Ruffini*, encontre o quociente, $Q(x)$, e eventual resto, $R(x)$, da divisão entre os polinômios $P(x)=x^4-3x^2+5x+1$ e $D(x)=x-2$.

9. Usando o *dispositivo prático* para a multiplicação de polinômios, encontre $P(x)\cdot M(x)$, sabendo que: $P(x)=3x^3-2x^2+7$ e $M(x)=3x^4-7x^3+2x+1$.

10. Dado o polinômio $P(x)=(m^2-1)\cdot x^2+(m-1)\cdot x+7$, discuta, em função do parâmetro m, o seu grau, para que:

a) $P(x)$ seja de grau 2

b) $P(x)$ seja de grau 1

c) $P(x)$ seja de grau zero

Unidade III
Equações de 1º e 2º graus e Equações Fracionárias

Entendo, particularmente, que a matemática não é uma simples disciplina, mas, sim, um modo de pensar, dotado de simbologia própria, linguagem específica e ferramentas características que permitem expressar nosso pensar, nosso sentir, de modo universal e sem fronteiras em linguagem comum à humanidade.
Só é capaz de escrever um bom texto alguém que tenha passado pelo processo de alfabetização, conheça o significado das palavras e saiba delas fazer uso. De modo análogo, fazer matemática só é possível por processo semelhante. Os polinômios, constituídos de letras e números, são palavras, modelando o mundo ao redor. Transformados em equações, as frases, propõem indagações. Uma vez resolvidas, nos oferecem as respostas buscadas, por analogia, a mensagem do texto. Nesta Unidade, vamos aprender a interpretar tais frases, ou seja, resolver as equações fruto de um modelamento matemático.

3.1 Equação de 1º grau: definição

Equação de 1º grau, na incógnita *x*, é toda igualdade do tipo: $ax+b=0$, ou redutível a esse tipo, onde *a* e *b* são números reais e $a\neq0$. É equação do 1º grau, porque a incógnita *x* tem maior expoente igual a 1. O valor da incógnita *x*, em existindo, será dito *raiz* ou *zero* da equação, e será a solução, ou seja, é o número que posto "*no lugar de x*" transforma a equação numa igualdade numérica.

Ao conjunto formado pelas *raízes* de uma equação chamamos de *conjunto solução da equação* e será indicado por ***S***.

Por exemplo, a solução da equação $2x-3=5$ será dada por $x=4$, pois, $2(4)-3=5$ e seu conjunto solução é: $S=\{4\}$.

3.1.1 Resolução de Equações de 1º grau

Para resolvermos equações de 1º grau basta isolarmos no primeiro membro os termos que contêm *x*, passando para o segundo membro aqueles que não contêm. Na sequência, agrupamos os termos semelhantes em ambos os membros da equação, reduzindo-os a um só termo. Os termos que estão multiplicando ou dividindo a incógnita *x* no primeiro membro passarão para o segundo membro, dividindo ou multiplicando, respectivamente.

Veja só:

1. Resolver a equação: $3(x+1)-2(x-3)=5$

Aplicando a propriedade distributiva: $3x+3-2x+6=5$

Isolando no primeiro membro somente os termos em *x*: $3x-2x=5-3-6$

Agrupando os termos semelhantes: $x=-4$ que é a raiz da equação

conjunto solução: $\therefore\ S=\{-4\}$

2. Resolver a equação: $\dfrac{x-3}{5}=\dfrac{5x-15}{6}$

Tirando o mmc e reduzindo as frações ao mesmo denominador temos: $\dfrac{6(x-3)}{30}=\dfrac{5(5x-15)}{30}$

$$6x-18=25x-75 \quad\Rightarrow\quad 6x-25x=-75+18 \quad\Rightarrow\quad -19x=-57 \qquad \therefore x=\frac{-57}{-19}$$

$$\Rightarrow\quad x=\frac{57}{19}$$ raiz da equação

$S=\{3\}$ conjunto solução

3. $4x+3-4(x+5)=0$

$4x+3-4x-20=0 \Rightarrow 0x-17=0$

$\therefore\ 0x=17$ Como não existe valor algum de x que satisfaça a equação dada, temos que: $S=\phi$

4. $2(x+1)-3x+2-(4-x)=0$

$2x+2-3x+2-4+x=0 \quad \Rightarrow 2x-3x+x=-2-2+4 \quad \therefore\ 0\cdot x=0$ Note que esta é uma igualdade verdadeira para qualquer valor de x. Então: $S=R$

3.2 Equação de 2º grau: definição

Equação do 2º grau, na incógnita x, é toda igualdade do tipo: $ax^2+bx+c=0$ ou redutível a esse tipo, onde a, b e c são números reais e $a \neq 0$. A equação é chamada de 2º grau, porque a incógnita x apresenta maior expoente igual a 2.

Fique atento

Se $\begin{cases} b \neq 0 \\ c \neq 0 \end{cases}$ diremos que é equação completa de 2º grau

Se $\begin{cases} b = 0 \\ c = 0 \\ b = c = 0 \end{cases}$ diremos que é equação incompleta de 2º grau

3.2.1 Resolução de equações de 2º grau incompletas

Dizemos que uma equação de 2º grau é incompleta quando falta o termo b, ou o termo c, ou *ambos*. Resolver uma equação de 2º grau incompleta é bem simples e, para facilitar mais ainda, vamos dividir o processo em casos:

1º caso: $b=0$ e $c=0$ **saída: isolar** x

➢ $ax^2=0 \Rightarrow x^2=\frac{0}{a} \Rightarrow x^2=0 \Rightarrow x=0 \Rightarrow S=\{0\}$

2º caso: $b=0$ e $c\neq 0$ **saída: isolar *x***

- $ax^2+c=0 \quad \Rightarrow ax^2=-c \quad \therefore x^2=\frac{-c}{a^2} \quad \Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{-c}{a^2}}$

Fique atento

Note que: se $\frac{-c}{a^2}<0$ não teremos solução $\Rightarrow$ $S=\phi$

Exemplo: Resolver a equação: $5x^2-75=0$

Solução:

$$5x^2-75=0 \Rightarrow 5x^2=75 \Rightarrow x^2=\frac{75}{5} \Rightarrow x^2=25 \Rightarrow x=\pm\sqrt{25}$$

$$\therefore x=\pm 5 \Rightarrow S=\{-5,5\}$$

Exemplo: Resolver a equação: $x^2+4=0$

Solução:

$x^2+4=0 \Rightarrow x^2=-4 \quad \therefore \quad x=\sqrt{-4}$, que não tem solução no conjunto dos números reais, então:

$$S=\phi \quad \text{ou} \quad S=\{\}$$

Fique atento

Nunca escrever a resposta assim: $S=\{\phi\}$

3º caso: $b\neq 0$ e $c=0$ **saída: fatorar e isolar *x***

- $ax^2+bx=0 \quad \Rightarrow \quad x(ax+b)=0 \quad \therefore \quad x=0$ ou $ax+b=0$

$$\Rightarrow ax=-b \quad \therefore \quad x=\frac{-b}{a} \quad \text{então: } S=\left\{0,\frac{-b}{a}\right\}$$

Fique atento

Note que: se $c=0$ uma das raízes sempre será zero.

Exemplo: Resolver a equação: $3x^2-12x=0$

Solução:

$3x^2-12x=0 \quad \Rightarrow x\cdot(3x-12)=0$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ 3x-12=0 \end{cases} \qquad \therefore\ 3x-12=0 \ \Rightarrow x=\frac{12}{3} \quad \therefore x=4 \qquad \Rightarrow \qquad S=\{0;4\}$$

3.2.2 Resolução de equações de 2º grau completas

Para resolver as equações completas de 2º grau, usamos a *Fórmula de Bhaskara*, dada por: $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$, onde: x será a *raiz* ou *zero* e $\Delta=b^2-4ac$, a quem chamamos de *discriminante*, representado pela letra grega Δ (*delta*).

Fique atento

Discriminante: o que discrimina, classifica, separa. **Note que:** $\begin{cases} \Delta<0 & \text{não há raiz real} \\ \Delta=0 & \text{duas raízes reais e iguais} \\ \Delta>0 & \text{duas raízes reais e diferentes} \end{cases}$

Exemplo: $x^2-7x+12=0$

Solução:

Temos que: $\begin{cases} a=1 \\ b=-7 \\ c=12 \end{cases}$ Portanto, $\Rightarrow$ $\begin{array}{l} \Delta=b^2-4ac \\ \Delta=(-7)^2-4(1)(12)=49-48 \\ \therefore\ \Delta=1 \end{array}$ e as raízes serão dadas por:

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-7)-\sqrt{1}}{2\cdot 1}=\frac{7-1}{2}=3$$

$$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-7)+\sqrt{1}}{2\cdot 1}=\frac{7+1}{2}=4$$

e o conjunto solução é S = {3; 4}

3.2.3 Relações de Girard ou "Soma e Produto"

No sec. XVII, Albert Girard notou uma relação interessante entre os *coeficientes* da equação de 2º grau e suas *raízes*. Ele percebeu que: "*a soma das raízes da equação sempre será o oposto da razão entre os coeficientes b e a" e que o produto das raízes sempre será a razão entre os coeficientes c e a"*.

Matematicamente, escrevemos: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$

Veja só:

somando as raízes: $S = x_1 + x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} + \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-2b}{2a} = -\dfrac{b}{a} \quad \therefore \; S = -\dfrac{b}{a}$

multiplicando as raízes: $P = x_1 \cdot x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \cdot \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{(-b-\sqrt{\Delta})(-b+\sqrt{\Delta})}{4a^2}$

$$P = \frac{(-b)^2 - (\sqrt{\Delta})^2}{4a^2} = \frac{b^2 - \Delta}{4a^2}$$

$$P = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2}$$

$$P = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a} \qquad \therefore \; P = \frac{c}{a}$$

$\therefore \begin{cases} S = -\dfrac{b}{a} \\ P = \dfrac{c}{a} \end{cases}$ **c.q.m.** (como queríamos mostrar)

Fique atento

A resolução das equações de 2º grau usando as relações de Girard é prática somente quando a equação possui **raízes inteiras.**

Na realidade, essa relação encontrada não se restringe somente às equações de 2º grau. Pesquise a respeito e constatará.

Alguns exemplos de aplicação:

1. Verifique se a soma e o produto das raízes da equação $x^2 - 5x + 6 = 0$ são 5 e 6.

Solução:

De fato, isto é verdade, pois, resolvendo a equação por Bhaskara, encontramos o conjunto solução $S = \{2, 3\}$. E, usando as relações de Girard, temos: $S = -\frac{b}{a} = -\frac{-5}{1} = 5$ e $P = \frac{c}{a} = \frac{6}{1} = 6$

2. Determinar as raízes da equação $x^2 - 7x + 10 = 0$ usando *Girard*.

Solução:

$\begin{cases} S = \_\_\_ + \_\_\_ = 7 \\ P = \_\_\_ \cdot \_\_\_ = 10 \end{cases}$ buscamos números que somados deem **7** e que multiplicados deem **10**

$\therefore \begin{cases} \underline{2} + \underline{5} = 7 \\ \underline{2} \cdot \underline{5} = 10 \end{cases}$ então, a solução da equação $x^2 - 7x + 10 = 0$ será: S = {2; 5}.

3.2.4 Equações literais de 2º grau

Definição: Se uma equação de 2º grau na variável *x* apresentar um ou mais coeficientes indicados por letras, além da variável, a equação é chamada de *equação literal***.** Veja: $x^2 - 4mx - 5m^2 = 0$

A solução se dá do mesmo modo que as equações já estudadas, seja por *Baskara* ou *Girard*.

Resolva a equação $x^2 - 4mx - 5m^2 = 0$

Solução:

Temos que: $\begin{cases} a = 1 \\ b = -4m \\ c = -5m^2 \end{cases}$ Portanto, $\Rightarrow \begin{array}{l} \Delta = b^2 - 4ac \\ \Delta = (-4m)^2 - 4(1)(-5m^2) = 16m^2 + 20m^2 \\ \therefore\ \Delta = 36m^2 \end{array}$ então,

$$x = \frac{-(-4m) \pm \sqrt{36m^2}}{2(1)} \Rightarrow x = \frac{4m \pm 6m^2}{2} \quad \therefore x = 2m \pm 3m \quad \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2m + 3m = 5m \\ x_2 = 2m - 3m = -m \end{cases}$$

$$\therefore\ S = \{5m, -m\}$$

Fique atento

Resolva usando Girard e veja como fica menos trabalhoso...

3.2.5 Fatoração do trinômio de 2º grau

Vimos na Unidade I que a fatoração do trinômio de 2º grau é obtida a partir das *raízes* do polinômio, usando a fórmula $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$. Assim, basta encontrar a raízes para obtermos o *trinômio fatorado.*

Fique atento

Cuidado: nem sempre o valor de "*a*" será igual a 1, atente para isso.

3.3 Equações Fracionárias

Chamamos de equação fracionária aquelas que apresentam incógnita no denominador, por exemplo: $\frac{1}{3x^2}+\frac{1}{9}=\frac{4}{9x}$. Como divisão por zero não tem sentido, em qualquer equação fracionária deve-se excluir do conjunto universo os valores que anulem os denominadores da fração. Então em $\frac{1}{3x^2}+\frac{1}{9}=\frac{4}{9x}$, deve-se excluir a possibilidade de x ser igual a zero. Para resolvermos tais equações: tiramos o mmc entre os denominadores e reduzimos as frações a uma só fração, efetuando as operações indicadas; em seguida, caímos em um dos casos estudados anteriormente.

Veja: Resolver a equação: $\frac{1}{3x^2}+\frac{1}{9}=\frac{4}{9x}$

Solução: O **mmc** dentre os denominadores $3x^2,\ 3^2,\ 9x$ é o *produto de todos os seus fatores comuns e não comuns, tomados com seus maiores expoentes*. Então: mmc $3x^2,\ 3^2,\ 9x=3x^2,\ 3^2,\ 3^2x=$ $=9x^2$

Reduzindo as frações ao mesmo denominador, temos: $\frac{3}{9x^2}+\frac{x^2}{9x^2}=\frac{4x}{9x^2}$. Multiplicando todos os termos pelo mmc $9x^2$, para cancelarmos os denominadores, obteremos: $3+x^2=4x$, ordenando o polinômio vem $x^2 - 4x + 3 = 0$ que é uma equação completa de 2º grau; essa, resolvida por Girard, resulta nas raízes 1 e 3.

$$\therefore\ S = \{1;3\}$$

Resolver a equação: $\dfrac{5}{x+3} - \dfrac{10}{x^2-9} = 0$, com $x \neq -3$ e $x \neq 3$:

Solução:

$$\frac{5}{x+3} - \frac{10}{x^2-9} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{5}{x+3} - \frac{10}{(x+3)(x-3)} = 0$$

Multiplicando ambos os membros pelo mmc $(x+3)(x-3)$, obtemos: $5(x-3) - 10 = 0$. Efetuando a distributiva: $5x - 15 - 10 = 0$ e agrupando os termos semelhantes, obtemos: $5x - 25 = 0$, que é uma equação de 1º grau, que resolvida: $\Rightarrow x = 5 \quad \therefore\ S = \{5\}$

Fique atento

Note que: se tivéssemos obtido valor para *x* igual a 3 ou –3, eles seriam *descartados*, pois *não pode ocorrer denominador igual a zero.*

3.3.1 Aprendendo:

1. Resolva as equações:

a) $x^2 - 5x + 6 = 0$

b) $6x^2 - 13x + 6 = 0$

c) $2x^2 - 3x + 5 = 0$

d) $-8x^2 - 24x + 144 = 0$

2. Determine, usando soma e produto, as raízes das equações:

a) $x^2 + 8x + 15 = 0$

b) $x^2 - 3x - 4 = 0$

c) $x^2 - x - 2 = 0$

d) $x^2 - 27x + 50 = 0$

3. Resolva as equações literais:

a) $x^2 + 2.a.x + a^2 = 0$

b) $x^2 - 2mx - 8m^2 = 0$

c) $x^2 + 7mx + 10m^2 = 0$

4. Determine o valor de *m* de modo que a soma das raízes da equação $3x^2 - 6mx + 1 = 0$ seja igual a 2.

5. Resolva as seguintes equações fracionárias: a) $\frac{2x-1}{x-2} - \frac{1+3x}{x+5} = \frac{5-2x}{2x-4}$ b) $\frac{x-2}{x} - 1 = \frac{3}{2-x}$

3.4 Síntese da Unidade:

Nesta Unidade, aprendemos como identificar equações de 1º e 2º graus e como resolvê-las. Vimos também o que são as equações literais e as equações fracionárias, bem como as eventuais restrições a esse tipo de equação. É importante ressaltar o emprego da relação de Girard para a resolução das equações de 2º grau, visto que na maioria dos problemas envolvendo equações de 2º grau as raízes são números inteiros. Portanto, fique atento a isso.

Demana: https://plataforma.bvirtual.com.br/Acervo/Publicacao/21 **(p. 37)**

Boulos: https://plataforma.bvirtual.com.br/Acervo/Publicacao/177839 **(p. 71)**

GUELLI, Oscar. *Equação o idioma da Álgebra*. São Paulo: Ática, 1999. Coleção Contando a História da Matemática.

ROSA NETO, Ernesto. *As mil e uma equações*. São Paulo: Ática, 2008. Coleção A Descoberta da Matemática

TAHAN, Malba. *O homem que calculava*. Rio de Janeiro: Record, 2003.

AABOE, Asger. *Episódios da história antiga da Matemática*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1984.

3.6 Praticando:

5

1. Resolva as equações:

a) $2x^2 - 10x = 0$ b) $8x^2 - 2 = 0$

c) $9x^2 + 18 = 0$ d) $(x+2)(x^2+4x+3) = 0$

2. Resolva as equações literais:

a) $2x^2 + ax = 3a^2$ b) $ax^2 + 2bx = 0$ c) $a^2x^2 + 12 = 8ax$

d) $x^2 - 2mx + m^2 - n^2 = 0$ e) $x^2 - (a-b)x - ab = 0$ f) $x^2 - 3ax + 2a^2 = 0$

g) $x^2 - (k+4)x + 4k = 0$ h) $x^2 - 2ax + a^2 - b^2 = 0$

3. Resolva as seguintes equações fracionárias, não se esquecendo da condição de existência.

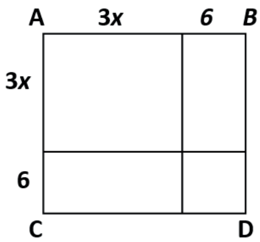
a) $\frac{5}{x^2-9}+1=\frac{x}{x+3}$

b) $\frac{2}{x^2-4}-\frac{1}{x(x-2)}+\frac{x-4}{x(x+2)}=0$

4. Determine o número natural cuja soma de seu dobro com seu quadrado resulte em 48.

5. A diferença entre o quadrado e o quíntuplo de um mesmo número é 24. Determine esse número.

6. A figura abaixo mostra um quadrado ABCD cuja área é igual a 121 cm^2. Determine o valor da medida x.



7. Determine a medida x para que um quadrado de lado igual a $x+2$ tenha a mesma área que um retângulo de lados $2x-1$ e $x-4$.

Unidade IV

Funções

O conceito de função surge no 9º ano do ensino fundamental, e tem sequência nas demais séries do ensino médio. Embora não discutamos a importância dos demais conteúdos abordados nos ensinos fundamental e médio, acreditamos que o assunto função seja, dentre todos, o de maior importância, pois vai muito além de uma simples relação entre grandezas, como é comumente apresentado. Função é o objeto principal de estudo do Cálculo Diferencial e Integral, tanto a uma quanto a várias variáveis. É fundamental para analisar os fenômenos que nos rodeiam, possibilitando interpretá-los, identificando seu comportamento e, eventualmente, para estabelecer generalizações a partir dessa análise, seja para avaliar o poder de contaminação de um vírus em uma população, acompanhar o crescimento de plantas ou para a tomada de decisão para estabelecer o preço de venda de um dado produto. A construção de gráficos, a partir da lei de formação de uma função, e a análise desses gráficos são também assuntos de grande importância.

4.1 Função: definição, domínio, contra domínio e imagem

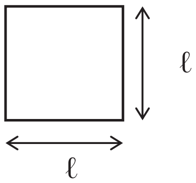
Quase tudo ao nosso redor está sujeito a mudanças. A variação de uma grandeza implica, usualmente, na variação de outra grandeza, por exemplo:

- o salário de um vendedor é função da quantidade de suas vendas;
- a área de um quadrado é função da medida de seu lado;
- a distância percorrida por um corpo em queda livre é função do tempo que ele leva para cair;
- o valor a ser pago pelo uso do celular é em função do tempo gasto nas ligações

Fique atento

Grandeza em matemática significa uma certa "quantidade" de algo.

Vamos imaginar um quadrado cujo lado mede $\boldsymbol{\ell}$.



designando por $\boldsymbol{p}$ a medida do perímetro desse quadrado, podemos estabelecer a seguinte relação entre as medidas do lado e do perímetro: $p = 4 \cdot l$

Nota-se que a medida do perímetro p depende da medida ℓ do lado, o que pode ser verificado na tabela:

Lado ℓ	**Perímetro** p
1	4
2	8
3	12
4	16

Observando a tabela, notamos que:

- a medida ℓ do lado do quadrado é uma grandeza variável
- a medida p do seu perímetro é uma grandeza variável
- a todos os valores de ℓ estão associados valores de p
- a cada valor de ℓ está associado um único valor de p

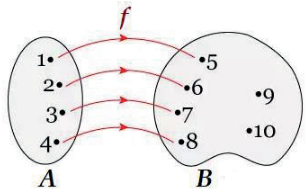
Dizemos, então:

- A medida p do perímetro de um quadrado é dada em ***função*** da medida ℓ do seu lado.
- A relação $p = 4.\ell$ chama-se ***lei de associação*** ou ***fórmula matemática*** desta função.

Na lei de associação desta função, $p = 4.\ell$, temos que: $\boldsymbol{p}$ é a variável dependente e $\boldsymbol{\ell}$ é a variável independente, que indicamos por: $p = p(l)$ e lemos: "***p** depende de* $\boldsymbol{l}$" ou "$\boldsymbol{p}$ é função de $\boldsymbol{l}$".

Desse modo, dizemos que função é toda relação entre dois conjuntos A e B, de modo que, a cada elemento do conjunto A, corresponda *um e só um* elemento do conjunto B. *Um e só um* significa que cada elemento do conjunto A ***tem*** que se corresponder com *um* elemento do conjunto B, e ***somente uma vez***.

Representação de função usando diagrama de Euler



Fique atento

Note que: *todos* os elementos do conjunto A se relacionaram com elementos do conjunto B, e se relacionaram com *somente um* elemento de B. Caso algum elemento do conjunto A não se relacione, ou se relacione com mais de um elemento de B, diremos que temos uma *relação* entre A e B e **não uma função**. **Toda função é relação, mas nem toda relação é função**.

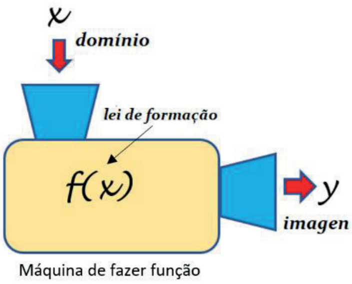
Chamando de x os elementos do conjunto A e de y os elementos do conjunto B, e indicando a relação entre elementos dos conjuntos A e B pela letra f, temos que: $f(x) = y$ que lemos: a função f aplicada no elemento x leva ao elemento y. Comumente, chamamos os elementos do conjunto A de *domínio*, sendo que, os elementos do conjunto B que se relacionaram com os elementos do conjunto A, chamaremos de *imagem*. Os demais elementos de B que não se relacionaram, chamaremos de elementos do *contra domínio*.

Vimos que a função $p = p(l)$, que relaciona o perímetro p de um quadrado de lado l, tem lei de formação dada por $p = 4l$. Note que só admitiremos valores de l pertencente aos números reais positivos, ou seja $l \in \mathbb{R}_+^*$, pois não tem sentido atribuir a l valores negativos ou zero. Assim, dizemos que o *domínio da função* $p = p(l)$ será o conjunto $\mathbb{R}_+^*$ e a *imagem* será dada por todos os possíveis valores de resposta ao multiplicarmos l por 4. Desse modo, definimos como sendo **conjunto domínio** de uma função todos os valores de *entrada* que, postos na função, produzirão uma resposta. Já o **conjunto imagem** será aquele constituído por todas as *respostas* possíveis.

Para a função $f(x) = \frac{5}{x+1}$, temos que seu *domínio* será dado por: $D_f = \{x \in \mathbb{R} | x \neq -1\}$, pois o denominador não pode ser zero e o conjunto *imagem* será dado por: $Im_f = \mathbb{R}^*$

Já a função $g(x) = \sqrt{x+2}$ terá domínio $D_f = \{x \in \mathbb{R} | x \geq -2\}$, pois radicando de radical de índice par jamais pode ser negativo.

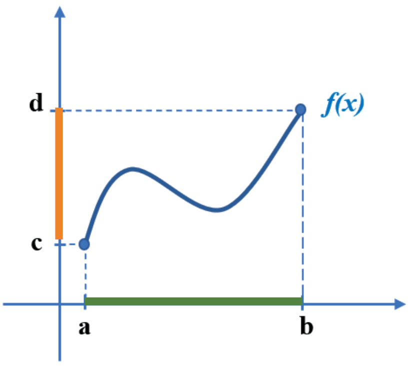
Traquitana de fazer função



Podemos representar funções de várias maneiras, usando *diagrama de flexas*, *pares ordenados*, *tabelas*, *lei de formação* e *gráficos*; os meios mais comuns são *lei de formação* e *gráficos*.

Veja só: observando a função dada pelo gráfico abaixo, temos que seu *domínio* será $D_f = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}$e sua *imagem* será $Im_f = \{y \in \mathbb{R} | c \leq x \leq d\}$.

Gráfico da função $f(x)$



Fique atento

Para determinar o domínio de uma função a partir de seu gráfico, imaginamos retas perpendiculares ao eixo x ao longo do gráfico. Todos os pontos do intervalo em que estas retas interceptarem simultaneamente o gráfico e o eixo x serão valores de domínio da função. De modo análogo, ao imaginarmos retas perpendiculares ao eixo y que eventualmente cortem o gráfico e o eixo, teremos os valores de imagem.

4.1.1 Função de 1º grau: definição, gráfico e estudo do sinal

Função de 1º grau é toda sentença matemática do tipo:$f(x) = ax + b$, com a e $b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$. O gráfico da função de 1º grau é uma reta, e, sendo uma reta, basta conhecermos dois de seus pontos para esboçar esse gráfico. Caso $b \neq 0$, a função é dita *função afim* e, sendo $b = 0$, ela será chamada de função *linear*. Caso $a = 0$, ela deixa de ser função de 1º grau, passando a ser chamada de *função constante*, cuja lei de formação é dada por $f(x) = c$, e o gráfico será uma reta paralela ao eixo *x*, passando por *c* no eixo *y*. Como o gráfico da função $\boldsymbol{f(x) = ax + b}$ é uma reta, bastam dois pontos para bem defini-la no plano. Vamos construir o gráfico da função $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{IR} \rightarrow \boldsymbol{IR}$ definida por: $\boldsymbol{f(x) = x + 1}$ ou $\boldsymbol{y = x + 1}$. Para construir o gráfico, basta saber onde a reta cortará o eixo *y* (*sempre em x = 0*) e onde ele cortará o eixo *x* (*sempre em y = 0*); ligando esses dois pontos, teremos o gráfico desejado. De modo prático, basta responder às perguntas:

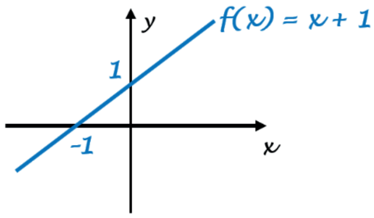
a) Corta *y* em ?

Se $x = 0$, na lei de formação da função, temos que $y = 1$, portanto corta o eixo *y* em (0 ; 1).

b) Corta *x* em ?

Se $y = 0$, temos que $\boldsymbol{x + 1 = 0}$; então, $x = -1$, portanto corta o eixo *x* em (– 1; 0) .

Marcados os pontos encontrados no sistema de coordenadas cartesianas e ligando-os, temos:



É interessante observar que, como $a > 0$, pois $a = 1$, a *inclinação da reta* em relação ao eixo *x* será *menor que* 90º, e o valor *a* é chamado de *coeficiente angular* da reta. Neste caso, dizemos que a reta é crescente, pois, para valores cada vez maiores de *x* (domínio), o valor de *y* (imagem) também aumentará.

Vamos agora construir o gráfico da função $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{IR} \rightarrow \boldsymbol{IR}$ definida por: $\boldsymbol{f(x) = -x + 3}$ ou $\boldsymbol{y = -x + 3}$. Novamente, de modo prático, respondemos às perguntas:

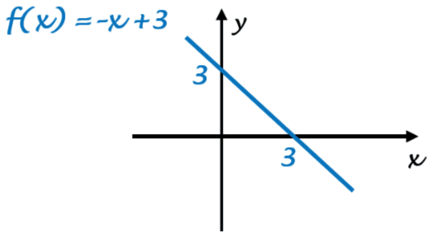
a) Corta *y* em ?

Se $x = 0$, na lei de formação da função, temos que $y = 3$, portanto corta o eixo *y* em (0; 3).

b) Corta *x* em ?

Se $y = 0$, temos que $-x + 3 = 0$, então $x = 3$, portanto corta o eixo *x* em (3; 0).

Marcados os pontos encontrados no sistema de coordenadas cartesianas e ligando-os, temos:



É interessante observar que, sendo $a < 0$, pois $a = -1$, a inclinação da reta em relação ao eixo *x* será maior que 90º. Neste caso, dizemos que a reta é decrescente, pois para valores cada vez maiores de *x* (*domínio*), o valor de *y* (*imagem*) diminuirá.

Observando a relação entre os *coeficientes a* e *b* , da função $y = ax + b$, e seu *gráfico*, notamos:

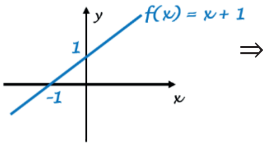
$$\begin{cases} a > 0 \quad \Rightarrow \quad ang < 90^{\circ} \\ a < 0 \quad \Rightarrow \quad ang > 90^{\circ} \end{cases}$$

Coeficiente angular "***a***" : ângulo que a reta faz com o eixo *x*:
Coeficiente linear "***b***" : onde a reta corta o eixo *y*

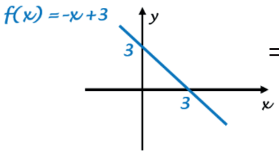
Estudar o sinal de uma função, qualquer que seja ela, significa verificar *para quais valores de x*, *domínio*, teremos *valores de y*, **imagens, positivos, negativos ou nulo**. Matematicamente, escrevemos:

$$y < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} | x = ?$$
$$y = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} | x = ?$$
$$y > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} | x = ?$$

Estudo do sinal da função *f(x)*:



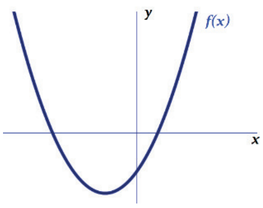
$$\Rightarrow \begin{cases} y < 0 & \forall x \in \mathbb{R} | x < -1 \\ y = 0 & \forall x \in \mathbb{R} | x = -1 \\ y > 0 & \forall x \in \mathbb{R} | x > -1 \end{cases}$$



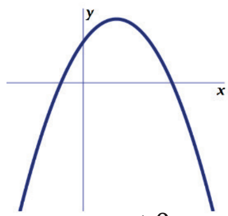
$$\Rightarrow \begin{cases} y < 0 & \forall x \in \mathbb{R} | x > 3 \\ y = 0 & \forall x \in \mathbb{R} | x = 3 \\ y > 0 & \forall x \in \mathbb{R} | x < 3 \end{cases}$$

4.1.2 Função de 2º grau: definição, gráfico e estudo do sinal

Função de 2º grau ou função quadrática é toda função $f: IR \rightarrow IR$ definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$. O gráfico de uma função do 2º grau é uma curva aberta chamada *parábola*. Caso $a > 0$, a concavidade será voltada para cima e, se $a < 0$, a concavidade será voltada para baixo.



$a > 0$



$a < 0$

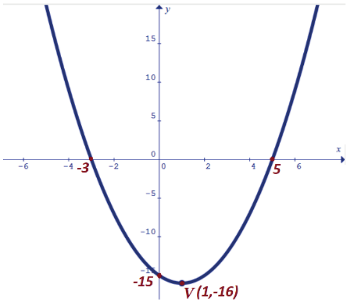
Fique atento

Para construir o gráfico da função de 2º grau, $f(x) = ax^2 + bx + c$, basta determinarmos:

- a concavidade
- onde corta eixo y: sempre em "c"
- onde corta eixo x: raízes
- coordenadas do Vértice: $V = (x_V, y_V) = (\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a})$

O gráfico de $y = x^2 - 2x - 15$será obtido, fazendo:

a) concavidade voltada para cima, pois, $a = 1 \Rightarrow a > 0$
b) corta o eixo y em -15
c) corta o eixo x em -2 e 5, suas raízes
d) coordenadas do vértice: $V = (1, -16)$



e estudando o sinal da função: $\Rightarrow \begin{cases} y < 0 & \forall x \in \mathbb{R} | -3 < x < 5 \\ y = 0 & x = -3 \text{ ou } x = 5 \\ y > 0 & \forall x \in \mathbb{R} | x < -3 \text{ ou } x > 5 \end{cases}$

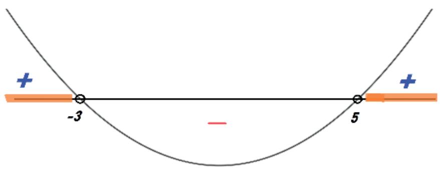
4.1.3 Inequações de 1º e 2º graus

Chamamos de inequações a sentenças que envolvam desigualdades ou, não igualdades, do tipo: $x - 2 < 0$, $x^2 - 2x - 15 > 0$, $x^2 - 4 \geq 0$, $x - 7 \leq 0$. É interessante observar que resolver uma inequação nada mais é que *determinar os valores reais de x que a tornam verdadeira*. Note também que a solução da inequação pressupõe, feito o *estudo do sinal da função*, escolher os valores de x que a satisfarão, tanto para as de 1º quanto 2º graus, mudando somente o gráfico da função.

Veja: Resolver $x^2 - 2x - 15 > 0$

Esboçando o gráfico para estudo de sinal

a) concavidade voltada para cima, pois, $a = 1 \Rightarrow a > 0$
b) corta o eixo x em -3 e 5, suas raízes



$$\therefore x^2 - 2x - 15 > 0 \quad \Rightarrow \quad S = \{\forall x \in \mathbb{R} | x < -3 \text{ ou } x > 5\}$$

Note que as raízes foram exclusas, "*bolinha vazia*"

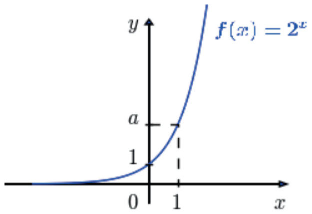
4.2 Função Exponencial: definição e gráfico

Uma *exponencial* nada mais é que uma potência de base positiva e diferente de 1; assim, chamaremos de função exponencial a toda função $f: IR_+^* \to IR$, definida por $y = a^x$, onde $a > 0$ e $a \neq 1$.

São exemplos de funções exponenciais: $f(x) = 5^x$; $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$; $g(x) = \left(\frac{2}{5}\right)^{-x}$

Gráfico da função Exponencial:

Dada a função: $f(x) = 2^x$ temos que o seu gráfico será:



Note que: $2^x \geq 0 \; \forall x \in \mathbb{R}$, desse modo, o gráfico da função jamais estará abaixo ou tocará o eixo x. O *eixo x*, nesse caso, será chamado de *assíntota* da função. **Assíntota** é a reta para qual a função ou curva tende, sem jamais alcançá-la.

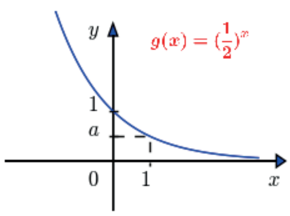
$Dom_f = \mathbb{R}$ e $Im_f = \mathbb{R}_+^*$

É interessante observar que, em $y = a^x$, sendo $a > 1$, a função será dita *crescente* e, sendo $0 < a < 1$, a função será dita decrescente.

Função crescente: quanto *maior o valor de x*, domínio, *maior o valor de y*, imagem.

Função decrescente: *quanto maior o valor de x*, domínio, *menor o valor de y*, imagem.

Já a função $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ terá seu gráfico dado por:



Note que: $\left(\frac{1}{2}\right)^x \geq 0 \; \forall x \in \mathbb{R}$, desse modo, o gráfico da função jamais estará abaixo ou tocará o eixo x. O *eixo x*, nesse caso, será chamado de *assíntota* da função.

$Dom_g = \mathbb{R}$ e $Im_g = \mathbb{R}_+^*$

4.2.1 Equações Exponenciais: técnicas de resolução

Denominamos de *equação exponencial* a toda igualdade envolvendo exponenciais, tipo: $a^x = b$.

Basicamente, a resolução de equações exponenciais consiste em *deixar ambos os membros da igualdade na forma de potências de mesma base para que comparemos os expoentes*.

Para isso, fatoramos ambos os membros da igualdade:

Veja os exemplos:

- $3^x = 27 \Rightarrow 3^x = 3^3 \therefore x = 3$ assim, temos que: $S = \{3\}$
- $\sqrt[4]{2^{x-1}} = 16 \Rightarrow 2^{\frac{x-1}{4}} = 2^4 \therefore \frac{x-1}{4} = 4 \Rightarrow x = 17$ assim, temos que: $S = \{17\}$
- $10^x = 1 \Rightarrow 10^x = 10^0 \therefore x = 0$ assim, temos que: $S = \{0\}$

Nos casos em que um dos membros ou ambos os membros da igualdade apresentam potências de mesma base, mas seus expoentes envolvem soma ou subtração de termos, aplicamos propriedades das potências, abrindo cada uma das potências em produto de potências de mesma base e, após fatoração, cairemos no caso mais simples.

- $3.2^{x+2} - 2^{x+1} + 4.2^{x-1} = 96$

$$3.2^x.2^2 - 2^x.2 + 4.2^x.2^{-1} = 96$$

$$3.4.2^x - 2.2^x + 4.\frac{1}{2}.2^x = 96$$

$$12.2^x - 2.2^x + 2.2^x = 96$$

$$12.2^x = 96$$

$2^x = \frac{96}{12} \Rightarrow 2^x = 8 \therefore 2^x = 2^3$ como as bases são iguais, temos que: $x = 3$

assim, o conjunto solução é: $S = \{3\}$

Nos casos em que as potências envolvidas presentam *bases quadradas entre si* ou mesmas bases, porém, *expoente dobro entre si*, usamos propriedades de potências para reescrever a equação e *troca de variáveis* para resolvê-la.

- $4^{x+1} - 9.2^x + 2 = 0$

$\therefore 2^{2x+2} - 9.2^x + 2 = 0$ note que as potências têm mesma base, porém os expoentes são o dobro.

Solução: $4^{x+1} - 9.2^x + 2 = 0 \therefore \left(2^2\right)^{x+1} - 9.2^x + 2 = 0 \Rightarrow 2^{2x+2} - 9.2^x + 2 = 0$

$$\therefore 2^{2x}.2^2 - 9.2^x + 2 = 0 \Rightarrow 4.2^{2x} - 9.2^x + 2 = 0 \Rightarrow 4.(2^x)^2 - 9.(2^x) + 2 = 0$$

chamando de $2^x = A$, teremos: $4.(A)^2 - 9.(A) + 2 = 0$, que é uma equação de 2º grau com raízes: $\begin{cases} A = 2 \\ A = \frac{1}{4} \end{cases}$

como: $2^x = A \Rightarrow \begin{cases} se\ \ A = 2 \Rightarrow 2^x = 2 \Rightarrow x = 1 \\ se\ \ A = \frac{1}{4} \Rightarrow 2^x = \frac{1}{4} \Rightarrow 2^x = 2^{-2} \Rightarrow x = -2 \end{cases}$ $\therefore S = \{-2; 1\}$

4.2.2 Inequações Exponenciais: técnicas de resolução

As inequações exponenciais diferem das equações exponenciais pelo sinal da *desigualdade* entre os membros. A solução das inequações exponenciais é muito semelhante, algebricamente, à solução das equações exponenciais. Deve-se observar que:

$f(x) = a^x$ ***é crescente*** quando $a > 1$

$f(x) = a^x$ será ***decrescente*** quando $0 < a < 1$

Antes de resolver uma inequação exponencial, deve-se observar a situação das bases nos dois membros; caso as bases sejam diferentes, reduza-as a uma mesma base e, em seguida, forme uma inequação com os expoentes, atentando para as regras dos sinais:

Caso: $a > 1$, **mantenha o sinal da desigualdade**

Caso: $0 < a < 1$, **inverta o sinal da desigualdade**

Veja exemplos:

- Resolver $\left(\frac{1}{9}\right)^x \leq 243$

$$\left(\frac{1}{3^2}\right)^x \leq 3^5 \Rightarrow \left(3^{-2}\right)^x \leq 3^5 \Rightarrow 3^{-2x} \leq 3^5 \Rightarrow -2x \leq 5 \Rightarrow \therefore\ x \geq -\frac{5}{2} \quad \therefore \quad S = \left\{x \in IR \mid x \geq -\frac{2}{5}\right\}$$

Note que: a solução da inequação exponencial é um intervalo numérico.

- Resolver $\left(\frac{1}{3}\right)^{-t} \leq \left(\frac{1}{9}\right)^{-\frac{2}{t}}$

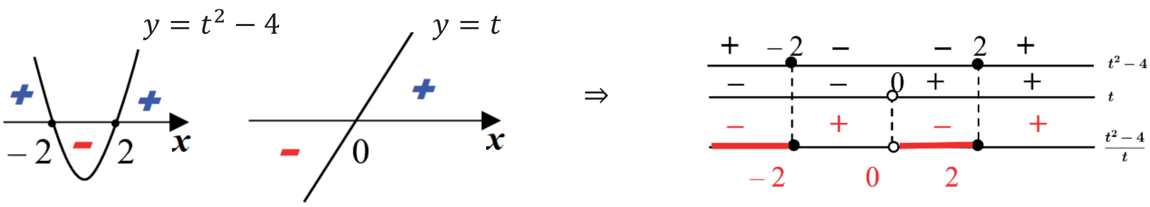
$$\left(\frac{1}{3}\right)^{-t} \leq \left(\frac{1}{3^2}\right)^{-\frac{2}{t}} \therefore \left(\frac{1}{3}\right)^{-t} \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{4}{t}}$$

como $0 <$ base < 1, invertemos a desigualdade ao comparar os expoentes.

Se: $\left(\frac{1}{3}\right)^{-t} \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{4}{t}} \Rightarrow -t \geq -\frac{4}{t}$, multiplicando ambos os membros por -1, temos:

$$t \leq \frac{4}{t} \Rightarrow t - \frac{4}{t} \leq 0 \Rightarrow \frac{t^2-4}{t} \leq 0$$ que é uma *inequação quociente...*

Estudando os sinais das funções do numerador e denominador, teremos:



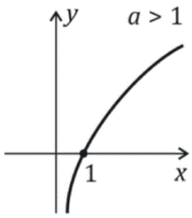
$$\therefore\ S = \{x \in IR \mid x \leq -2 \text{ ou } 0 < x \leq 2\}\ ou\ ]-\infty, -2] \cup]0, 2]$$

4.3 Função Logarítmica: definição e gráfico

Dada a *equação exponencial* $a^x = b$, com $a > 0$ e $a \neq 1$, chamaremos o número x de *logaritmo de b na base a*, matematicamente: $x = log_a b$; ou seja, *logaritmo* nada mais é que o nome dado ao *expoente de uma exponencial*. Matematicamente, escrevemos: $a^x = b \Leftrightarrow x = log_a b$

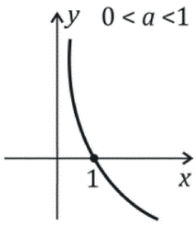
Desse modo, definimos a função $f: IR_+^* \to IR$, definida por $f(x) = log_a x$, com $a > 0$ e $a \neq 1$ como *função logarítmica*. É interessante observar que a função logarítmica é a função inversa da função exponencial. Desse modo, seus gráficos serão simétricos em relação à reta $y = x$ (*bissetriz dos quadrantes ímpares*).

O gráfico de $f(x) = log_a x$, com $a > 1$, portanto base maior que 1, será dado por:



Note que:
- $f(x)$ *é crescente*
- corta o eixo das *abscissas* em $x = 1$
- $Dom_f =]0, +\infty[= \mathbb{R}_+^*$
- $Im_f =]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$

O gráfico da função logarítmica $f(x) = log_a x$, com $0 < a < 1$, portanto base entre zero e 1, será dado por:



Note que:
- $f(x)$ *é decrescente*
- corta o eixo das *abscissas* em $x = 1$
- $Dom_f =]0, +\infty[= \mathbb{R}_+^*$
- $Im_f =]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$

4.3.1 Equações e Inequações Logarítmicas: propriedades dos logaritmos, técnicas de resolução

Para resolver **equações logarítmicas**, devemos:

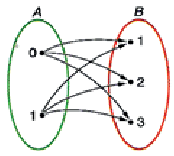
- Indicar as condições de existência.
- Resolver a equação aplicando as propriedades.
- Fazer a verificação das soluções obtidas na equação com as condições de existência.

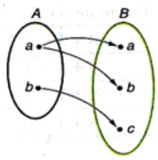
Para resolvermos as **inequações logarítmicas**, devemos:

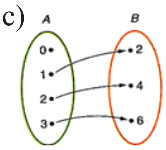
- Aplicar as propriedades e reduzir ambos os membros a um só logaritmo de mesma base.
- Observar a base: base > 1, manter a desigualdade; 0 < base < 1, inverter a desigualdade.
- Encontrar as condições de existência.
- Interseccionar a solução encontrada com a condição de existência, obtendo a solução do problema.

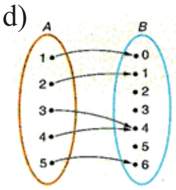
4.4 Aprendendo:

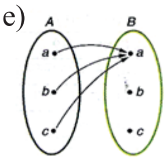
1. Sabendo que toda função é uma relação, mas nem toda relação é uma função, identifique quais dos diagramas abaixo representam uma função. Nos casos afirmativos, escreva o seu conjunto do domínio e o conjunto Imagem.

a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

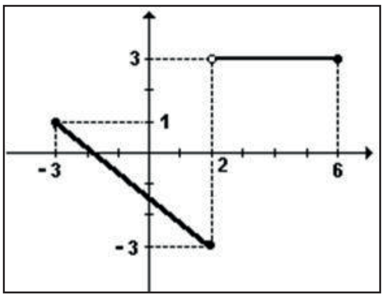
2. O gráfico da função $f(x) = ax + b$ passa pelos pontos $(1;2)$ e $(0;-1)$; pede-se determinar a lei de formação de $f(x)$.

3. Faça o esboço do gráfico e, a seguir, estude o sinal das funções:

a) $f(x) = 3x + 2$ b) $f(x) = -5x - 7$ c) $f(x) = -x^2 - 2x + 8$ d) $f(x) = x^2 - 4x - 5$

4. Determine o domínio das funções definidas por: $f(x) = \frac{3x+1}{\sqrt{x-3}}$

5. Sendo a função $f(x)$ representada pelo gráfico abaixo, determine:



a) $Dom_{f(x)}$ e $Im_{f(x)}$
b) intervalos onde $f(x)$ é crescente e onde é decrescente
c) intervalos onde $f(x) > 0$ e $f(x) < 0$
d) onde $f(x) = 0$
e) o valor $\frac{f(5)}{f(-3)-f(2)}$

4.5 Síntese da Unidade

Nesta Unidade, vimos o *objeto de estudo* do Cálculo Diferencial e Integral, o conceito de *função*. Aprendemos o significado de domínio, imagem, gráfico e estudo de sinal de uma função, regra válida para qualquer que seja a função. Aprendemos que geralmente o *nome dado à função* está vinculado à sua *lei de formação*, ou expressão matemática que a define, como função de 1º ou 2º graus, as exponenciais e as logarítmicas. Vimos também a importância do estudo do sinal na resolução das inequações, bem como a aplicação de intervalos numéricos na busca das soluções. É interessante ressaltar que os assuntos estudados em Unidades anteriores foram de grande relevância no processo algébrico empregado na solução dos problemas propostos e serão mais ainda nos que virão. Portanto, estude, aplique-se, apreenda os conteúdos estudados, pois serão ferramentas fundamentais na sequência de seu curso.

Demana, p. 59 | Petroli, p. 60 | Bosquilha, p. 11

4.6 Praticando:

1. Dada a função $f(x) = (m^2 - 16)x^2 + (m - 4)x + m + 4$, determine o valor de m de modo que:

a) $f(x)$ seja função do 2º grau

b) $f(x)$ seja função do 1º grau

c) $f(x)$ seja uma parábola côncava para cima

d) $f(x)$ seja uma reta paralela ao eixo x

2. Sabe-se que o custo C para produzir x peças de um tablet popular é dado por $C = x^2 - 40x + 2.000$. Assim sendo, pede-se calcular a quantidade de peças a serem produzidas para que o tablet tenha o menor custo possível e, em seguida, o valor deste custo mínimo.

3. Se $f(x) = a^x$ e $g(x) = x^2 - 1$ interceptam-se em um ponto de abscissa 3. Qual o valor de a?

4. Se $f(t) = 10.2^t$ é uma função que avalia a evolução de uma cultura de bactérias, em t horas, ao final de quantas horas teremos $f(t) = 5.120$?

5. Uma empresa de TI, ao desenvolver seu plano de negócio, projetou a expectativa de lucro segundo a fórmula matemática $L(t) = 2.000(1{,}25)^t$, onde $L(t)$ é o lucro esperado após t meses. Dado que: $log\, 4 = 0{,}602$ e $log\, 1{,}25 = 0{,}097$, a partir de quantos meses de funcionamento a empresa atingirá lucro de $R\$$ 8.000,00?

Unidade V
Trigonometria

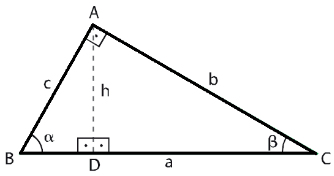
Nesta Unidade, estudaremos a trigonometria, seja no triângulo retângulo, xodó de Pitágoras, como também no círculo trigonométrico, ampliando nossos estudos referentes aos ângulos, além daquele possível no triângulo retângulo, restrito aos ângulos até 90º. Iniciamos os estudos com as relações métricas e trigonométricas no triângulo retângulo, recordando os arcos notáveis e suas razões trigonométricas, passando pelo estudo das funções trigonométricas e seus gráficos, tópico importante na área de tecnologia.

5.1 Triângulo retângulo

O triângulo retângulo é aquele que possui um ângulo interno de 90º graus ou *ângulo reto*. É um triângulo especial e, por conta disso, merece estudo específico, pois, ele é a base da *trigonometria*. Seus lados recebem nomes especiais, sendo que o lado oposto ao ângulo reto, ou lado maior, recebe o nome de *hipotenusa*, os demais lados, *catetos*. A soma dos ângulos internos em um triângulo é 180º, desse modo, é comum tratar os ângulos não retos do triângulo retângulo como *ângulos complementares*, pois, somam 90º.

5.1.2 Relações métricas no triângulo retângulo, Teorema de Pitágoras

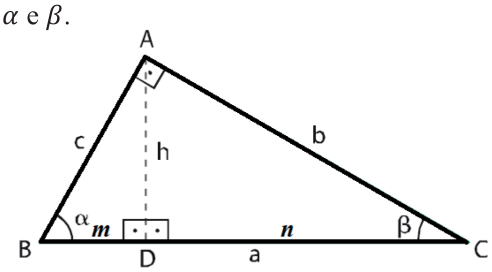
Seja o triângulo retângulo $C\hat{A}B$, retângulo em A:



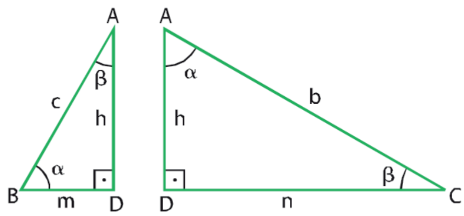
Definimos:

- n = projeção do cateto b sobre a hipotenusa
- m = projeção do cateto c sobre a hipotenusa
- $a = n + m$ = hipotenusa
- h = altura relativa ao lado BC

Para extrair algumas propriedades, faremos a decomposição do triângulo retângulo $C\hat{A}B$ em dois triângulos retângulos menores: $A\widehat{D}C$ e $A\widehat{D}B$. Assim, o ângulo A, ângulo de 90º, será decomposto na soma dos ângulos α e β.



⇒



Observe que os triângulos retângulos $C\hat{A}B$, $B\widehat{D}A$ e $C\widehat{D}A$ são semelhantes, pois, possuem ângulos internos congruentes, ou seja, de *mesmas medidas*. Assim, a partir da semelhança entre eles, podemos estabelecer as seguintes relações entre seus lados:

$\Delta ABC \sim \Delta DBA$: $\frac{AB}{BC} = \frac{DB}{BA} \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{m}{c} \Rightarrow c^2 = am$ (I)

$\Delta ABC \sim \Delta DAC$: $\frac{AB}{BC} = \frac{DA}{AC} \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{h}{b} \Rightarrow ah = bc$ (II) e $\frac{AC}{BC} = \frac{DC}{AC} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{n}{b} \Rightarrow b^2 = an$ (III)

$\Delta DBA \sim \Delta DAC$: $\frac{DA}{DB} = \frac{DC}{DA} \Rightarrow \frac{h}{m} = \frac{n}{h} \Rightarrow h^2 = mn$ (IV)

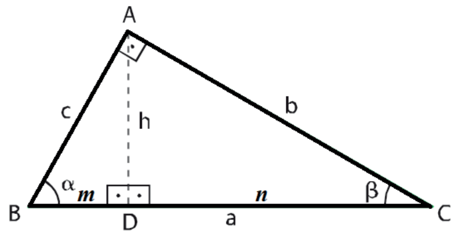
Somando membro a membro as equações (I) e (III), vem:

$\boldsymbol{c^2 = am}$

$\boldsymbol{b^2 = an}$

$b^2 + c^2 = am + an \Rightarrow b^2 + c^2 = a(m+n) \Rightarrow b^2 + c^2 = a(a) \therefore b^2 + c^2 = a^2$ (*Teorema de Pitágoras*)

Assim, temos o que chamamos de **relações métricas no triângulo retângulo**:



$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 \\ c^2 = am \\ b^2 = an \\ h^2 = mn \\ ah = bc \end{cases}$$

Fique atento

Tais relações são enunciadas como:

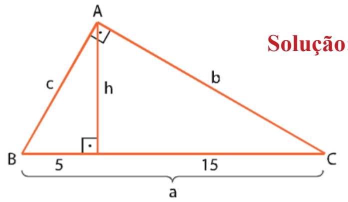
O quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos

O quadrado do cateto é igual ao produto de sua projecção pela medida da hipotenusa

O quadrado da altura é igual ao produto das projeções dos catetos sobre a hipotenusa

O produto da hipotenusa pela altura é igual ao produto dos catetos

Exemplo de aplicação: Dado o triângulo retângulo $B\hat{A}C$, determine b, c e h:



Solução:

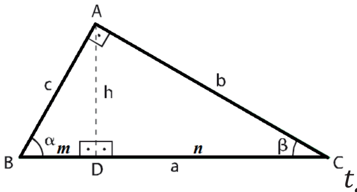
$b^2 = 15(5+15) \quad b^2 = 15 \cdot 20 \Rightarrow b = \sqrt{3 \cdot 5^2 \cdot 2^2} \quad \therefore \quad b = 10\sqrt{3}$

$c^2 = 5(5+15) \quad c^2 = 5 \cdot 20 \Rightarrow c = \sqrt{5^2 \cdot 2^2} \quad \therefore \quad c = 10$

$h^2 = 5 \cdot 15 \quad h^2 = 5^2 \cdot 3 \Rightarrow h = \sqrt{3 \cdot 5^2} \quad \therefore \quad h = 5\sqrt{3}$

5.1.3 Razões trigonométricas no triângulo retângulo

Dado o triângulo retângulo $C\hat{A}B$, considerando α e β seus ângulos internos, definimos:



$$sen\alpha = \frac{\text{cat. oposto a } \alpha}{\text{hipotenusa}} \quad \therefore \quad sen\alpha = \frac{b}{a}$$

$$cos\,\alpha = \frac{\text{cat. adjacente a } \alpha}{\text{hipotenusa}} \quad \therefore \quad cos\,\alpha = \frac{c}{a}$$

$$tg\alpha = \frac{\text{cat. oposto a } \alpha}{\text{cat. adjacente a } \alpha} \quad \therefore \quad tg\alpha = \frac{b}{c} \quad \text{ou ainda} \quad tg\alpha = \frac{sen\alpha}{cos\,\alpha}$$

De modo análogo, podemos definir para o ângulo β:

$$sen\beta = \frac{\text{cat. oposto a } \beta}{\text{hipotenusa}} \quad \therefore \quad sen\beta = \frac{c}{a} \quad ; \quad cos\,\beta = \frac{\text{cat. adjacente a } \beta}{\text{hipotenusa}} \quad \therefore \quad cos\,\beta = \frac{b}{a} \quad \text{e}$$

$$tg\beta = \frac{\text{cat. oposto a } \beta}{\text{cat. adjacente a } \beta} \quad \therefore \quad tg\beta = \frac{c}{b} \quad \text{ou ainda} \quad tg\beta = \frac{sen\beta}{cos\,\beta}$$

Definimos também:

$$\text{secante } \alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cat. adjacente a } \alpha} \therefore \ \text{sec}\alpha = \frac{a}{c}$$

$$\text{cossecante } \alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cat. oposto a } \alpha} \ \therefore \ \text{cossec}\alpha = \frac{a}{b} \qquad \text{por analogia: } \begin{cases} \text{sec}\beta = \frac{a}{b} \\ cossec\,\beta = \frac{a}{c} \\ \text{cotg}\beta = \frac{b}{c} \end{cases}$$

$$\text{cotangente } \alpha = \frac{\text{cat. adjacente a } \alpha}{\text{cat. oposto a } \alpha} \ \therefore \ \text{cotg}\alpha = \frac{c}{b}$$

É interessante notar que razão significa *divisão* e, ao dividirmos as medidas entre os lados do triângulo retângulo, por ser ele um triângulo especial, os resultados obtidos recebem nomes especiais: seno, cosseno e tangente, vinculados aos seus ângulos internos. Note também que, sendo αe β seus ângulos internos, eles somam 90º, portanto são *ângulos complementares*, então valem as relações: $sen\alpha = cos\,\beta$; $cos\,\alpha = sen\beta$; $tg\alpha = \frac{1}{tg\beta}$.

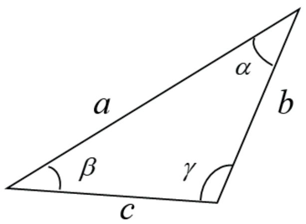
Razões Trigonométricas dos Arcos Notáveis

Chamamos de **arcos notáveis** aos ângulos 30º, 45º e 60º por aparecerem frequentemente em nossos cálculos e, cujos valores de seno, cosseno e tangente devem ser conhecidos. Para deduzirmos as razões trigonométricas de tais arcos, partimos de um quadrado de lado l para obter as razões trigonométricas para o arco de 45º e, de modo análogo, de um triângulo equilátero de lado l, para garantir a existência dos ângulos de 30º e 60º. Veja o vídeo preparado especialmente para essa demonstração.

Tabela dos Arcos Notáveis:

	30°	**45°**	**60º**
Seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Cosseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tangente	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Chamamos de "*Triângulos quaisquer*" aos demais triângulos não retângulos e, para eles, valem as leis:

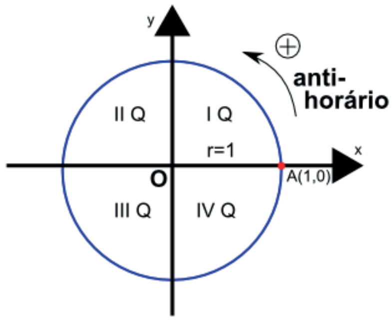


LEI DOS COSSENOS: $\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos\gamma \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac.\cos\beta \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos\alpha \end{cases}$

LEI DOS SENOS: $\frac{a}{sen\gamma} = \frac{b}{sen\beta} = \frac{c}{sen\alpha}$

5.2 Trigonometria no Círculo: definições iniciais

O *círculo trigonométrico* ou *ciclo trigonométrico* é uma entidade matemática que nos possibilita o cálculo de razões trigonométricas para qualquer ângulo. Ele é definido como sendo uma circunferência de raio unitário, $r = 1$, com centro localizado na origem (0,0) do sistema de coordenadas cartesianas no plano. Podemos associar um ponto (x,y) sobre a circunferência e, à esse ponto, *arcos*, medidos a partir da intersecção (0;1) do *semieixo* positivo ***Ox***, denominado *origem do ciclo*. A partir do ponto (0,1) podemos percorrer arcos na circunferência que serão orientados conforme a convenção:



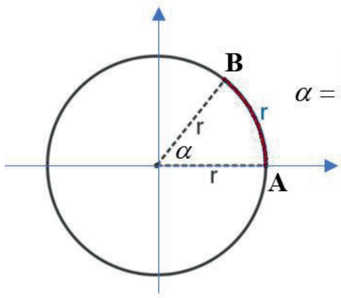
- A origem é o ponto ***A*** de coordenadas (1,0)
- O sentido anti-horário é o positivo
- O ciclo é dividido em quatro quadrantes: IQ, IIQ, IIQ e IVQ
- Uma "*volta*" no ciclo se chama *determinação*, e mede 360º
- Mesmo que o percurso tenha mais que uma volta, portanto meça mais que 360º, ele será chamado de *arco*.

5.2.1 Medidas de ângulos e arcos

Grau: Dividindo-se a circunferência em 360 partes iguais e ligando cada um desses pontos ao seu centro, determinamos *360 ângulos centrais*. Cada um desses ângulos é chamado de *1 grau*.

Radiano: Essa é uma das medidas mais usuais, principalmente nos problemas envolvendo trigonometria. Desenhamos uma circunferência de raio ***r*** e, em seguida, marcamos sobre ela um arco de mesmo "*tamanho*" que seu raio. O *ângulo central* que corresponde a esse arco mede **1 radiano** (1rad). Portanto, a medida de *1 radiano corresponde a um arco cujo comprimento é igual ao raio da circunferência*, ou seja, o comprimento do arco dividido pelo raio da circunferência é 1.

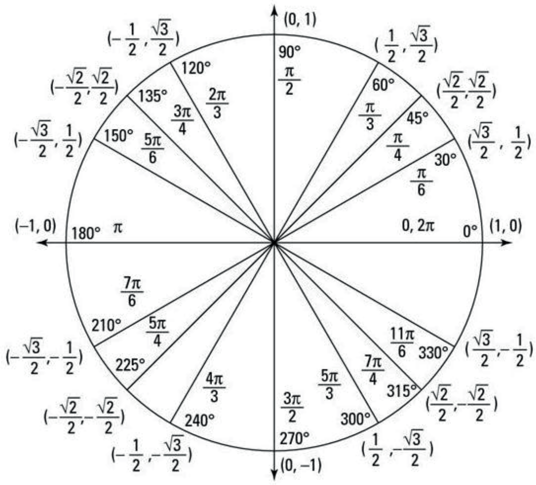
Arco de 1 radiano



$$\alpha = \frac{\overset{\frown}{AB}}{r}$$

A Conversão entre as medidas, *grau* e *radianos* é feita usando a relação: $180^{º} = \pi\ rad$, portanto, uma volta completa na circunferência, corresponderá a $360^{o} = 2\pi\ rad$.

Ciclo Trigonométrico e os Arcos Notáveis



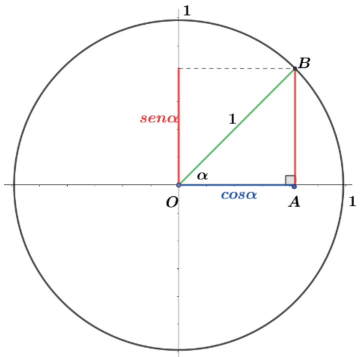
5.2.2 Arcos Côngruos

Dois arcos serão ditos *côngruos* quando possuem a *mesma origem e a mesma extremidade*. Uma regra prática e eficiente para determinar se dois arcos são côngruos consiste em verificar se a diferença entre eles é divisível ou múltipla de 360º, significando assim que a diferença entre as medidas dos arcos dividida por 360º precisa ter *resto igual a zero*, veja só: 8.390º e 6.230º são côngruos, pois, $\frac{8.390^{o} - 6.230^{o}}{360^{o}} = 6$.

5.2.3 Expressão geral dos Arcos Côngruos

A expressão geral dos arcos côngruos à um *arco de medida* α é dada por: $\alpha + 2k\pi$; se α estiver em radianos e $\alpha^{º} + k \cdot 360^{º}$, se α for *medido em graus*, com $k \in Z$. Assim, notamos que qualquer arco α é côngruo a outros infinitos arcos definidos pela soma de α com múltiplos de $\pm 2\pi$, ou seja, se estamos sobre o arco α e andarmos mais ou menos 2π sobre a circunferência voltaremos para a mesma posição e, se andarmos mais 2π voltamos novamente para a mesma posição original e, ainda, se formos andando mais múltiplos de 2π estaremos sempre voltando para a mesma posição. Desse modo, podemos escrever que qualquer arco côngruo de α é da forma: $\overset{\frown}{AB} = \alpha + 2k\pi$; $k \in Z$, que chamamos de *expressão geral dos arcos côngruos* ao arco *AB*.

5.2.4 A identidade Trigonométrica Fundamental e suas relações



Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo $O\hat{A}B$, cuja hipotenusa é o raio da circunferência de raio igual a 1, temos: $sen^2\,\alpha + cos^2\,\alpha = 1$ (I), que denominamos **identidade trigonométrica fundamental.** A Partir da *identidade trigonométrica fundamental*, dividindo ambos os membros da equação (I), por $sen^2\alpha$, vem:

$\Rightarrow 1 + cot\,g^2\,\alpha = cossec^2\,\alpha.$

Dividindo agora ambos os membros por $cos^2\,\alpha \Rightarrow\ tg^2\alpha + 1 = sec^2\,\alpha.$

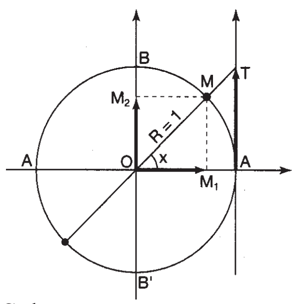
Temos ainda que: $sen^2\,\alpha + cos^2\,\alpha = 1 \Rightarrow \begin{cases} sen^2\,\alpha = 1 - cos^2\,\alpha \\ cos^2\,\alpha = 1 - sen^2\,\alpha \end{cases}$

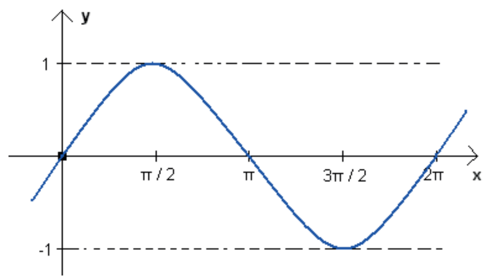
E ainda: $tg^2\alpha + 1 = sec^2\,\alpha\ \Rightarrow tg^2\alpha = sec^2\,\alpha - 1$ e $\Rightarrow cot\,g^2\,\alpha = cossec^2\,\alpha - 1.$

Todas essas *identidades trigonométricas* ou *relações trigonométricas* serão úteis na resolução de inúmeros problemas, particularmete ao estudarmos Cáclulo Diferencial e Integral, portanto, é interessante sabê-las.

5.3 As Funções Trigonométricas: Seno, Cosseno e Tangente – definições e gráficos

Função Seno: Dado um arco AM, de medida x radianos, definimos como seno x à ordenada do ponto M e representamos: sen $x = \overline{OM}_2$





Sobre a função seno, definimos:

Gráfico da função $\boldsymbol{f(x) = \text{sen}\,x}$

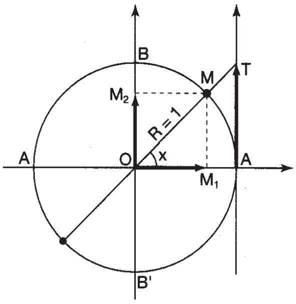
É função ímpar sen $x = -$sen $(-x)$

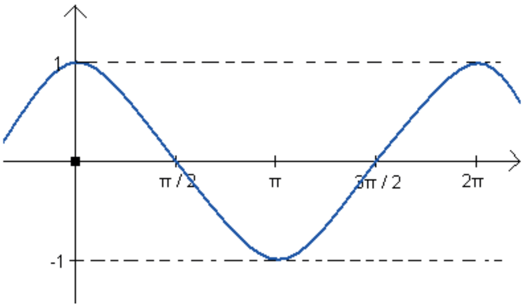
É positiva no 1º e 2º Q, negativa no 3º e 4º Q.

crescente no 1º e 4º Q, decrescente no 2º e 3º Q.

$Dom_f = IR =]-\infty; +\infty[\quad Im_f = [-1; +1]$ período:$p = 2\pi$

Função Cosseno: Dado um arco AM, de medida *x* radianos, definimos como cosseno *x* à abscissa do ponto *M* e representamos: $cos\ x = \overline{\mathrm{OM}_1}$.





Sobre a função cosseno, definimos:

Gráfico da função $f(x) = \cos x$

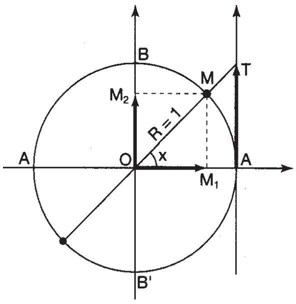
É função par $\cos x = \cos(-x)$

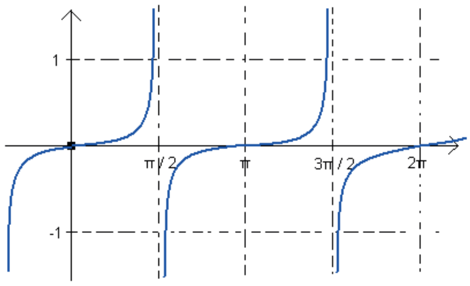
É positiva no 1º e 4º Q, negativa no 2º e 3º Q.

crescente no 3º e 4º Q, decrescente no 1º e 2º Q.

$Dom_f = IR =]-\infty; +\infty[$ $\quad Im_f = [-1; +1]$ $\quad$ Período:$p = 2\pi$

Função Tangente: Dado um arco AM, de medida *x* radianos, com $\boldsymbol{x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi}$, e $\boldsymbol{k \in Z}$, definimos como tangente de *x* à medida algébrica do segmento $\overline{\boldsymbol{AT}}$ e representamos: tg $\boldsymbol{x} = \overline{\mathrm{AT}}$.





Sobre a função cosseno, definimos:

Gráfico da função $f(x) = tg\ x$

É função ímpar $tg\ x = -tg\ (-x)$

É positiva no 1º e 3º Q, negativa no 2º e 4º Q

É estritamente crescente em todo o domínio

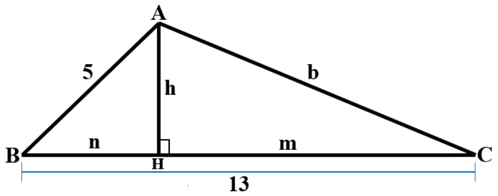
$Dom_f = IR - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\ ;\ k \in Z\right\}$ $\quad Im_f = IR$ $\quad$ Período: $p = \pi$

Um aplicativo muito interessante para estudar e apreender sobre os conteúdos estudados até aqui é o Geogbra, que possibilita transformarmos gráficos estáticos em animados, de modo a facilitar a percepção dos conceitos vistos. Acesse o Geogebra em: https://www.geogebra.org

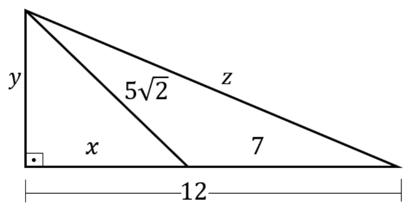
5.4 Aprendendo:

1. A medida da altura relativa à hipotenusa de um triângulo retângulo é 12 cm e uma das projeções dos catetos sobre a hipotenusa mede 9 cm. Calcular a medida dos catetos desse triângulo.

2. No triângulo ABC, retângulo em A, determine as medidas ***m, n, h*** e ***b***, sabendo que ***h*** é a altura relativa ao lado $\overline{BC}$.

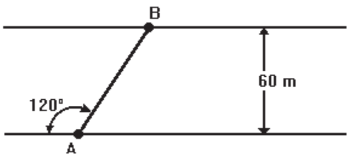


3. Dado o triangulo abaixo, determine o valor das incógnitas x, y e z:



4. Em um triângulo $B\hat{A}C$, retângulo em A, o ângulo B mede 30º e a hipotenusa mede 5cm. Determine as medidas dos catetos $\overline{AC}$e $\overline{AB}$ desse triângulo.

5. Um barco parte de um ponto A para a travessia de um rio. A direção de seu deslocamento forma um ângulo de 120° com a margem do rio. Se a largura do rio é de 60 m, qual distância, em metros, percorrida pelo barco?



6. Um observador vê um edifício, construído em terreno plano, sob um ângulo de 60º. Afastando-se do edifício mais 30 m, passará a vê–lo sob ângulo de 45º. Qual a altura do edifício.

7. Em um triângulo retângulo, α e β são seus ângulos internos. Sabendo-se que $sen\alpha = \frac{2}{3}$, pede-se determinar: a) $cos\,\beta$ b) tg β c) sen β

8. Represente no ciclo trigonométrico, as extremidades dos arcos cujas medidas são dadas pelas expressões:

a) $x = -\frac{\pi}{8} + k\pi, k \in Z$

b) $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in Z$

c) $x = 120º\ +\ k.90º,\ k \in Z$

d) $x = -150^o\ +\ k.360^o,\ k \in Z$

5.5 Síntese da unidade

Nesta unidade recordamos os conceitos principais envolvendo a trigonometria no triângulo retângulo e no ciclo trigonométrico. Vimos conceitos que serão necessários em várias das disciplinas de seu curso, portanto, apreenda os conceitos, pratique para que possa sedimentá-los e, no momento oportuno, deles fazer uso em situações problema. Muita atenção com os valores dos arcos notáveis, as transformações em graus e radianos e vice versa. Outro ponto relevante são as relações métricas e trigonométricas no triângulo retângulo, sem as quais, muitos problemas não terão com serem resolvidos. Destaco também a importância do "*desenho*" da figura que modela o enunciado dos problemas propostos, pois, um bom desenho é meio caminho para a solução buscada.

5.6 Para saber mais

Demana: https://plataforma.bvirtual.com.br/Acervo/Publicacao/21 **Apêndice C p. 229**

Manual Compacto de Matemática: https://plataforma.bvirtual.com.br/Acervo/Publicacao/182306 **Capítulo 6 p. 111**

Molter & Zahn: https://plataforma.bvirtual.com.br/Acervo/Publicacao/181781

Leite & Castanheira: https://plataforma.bvirtual.com.br/Acervo/Publicacao/30470

Manual Matemática Ridel: https://plataforma.bvirtual.com.br/Acervo/Publicacao/182305

5.7 Praticando

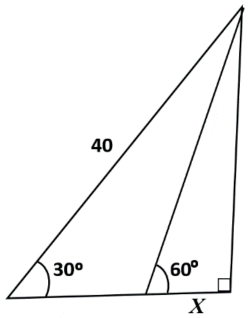
1. Seja o triângulo retângulo ABC, retângulo em A. Considere $\overline{AH}$ como sendo a medida da altura relativa à hipotenusa. Seja $\overline{BH} = 144\ cm$ e $\overline{AC} = 65\ cm$ assim, a medida do segmento $\overline{AB}$ será igual a:

a) 25 b) 60 c) 156 d) 169 e) 80

2. Uma antena vertical, erguida sobre um terreno plano, tem 25 m de altura. Para estabilizá-la, fixaram um cabo de aço, esticado, entre seu topo e o terreno, formado com este em ângulo de 60º. O comprimento do cabo de aço usado para a fixação da torre, em metros, foi:

a) $\frac{50\sqrt{3}}{3}$ b) 50 c) $\frac{50\sqrt{3}}{2}$ d) $\frac{25\sqrt{3}}{3}$ e) $\frac{25\sqrt{3}}{2}$

3. A medida x na figura abaixo é:



a) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ b) $\frac{10\sqrt{3}}{3}$ c) $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ d) $\frac{20\sqrt{3}}{3}$

e) $\frac{15\sqrt{3}}{4}$

4. As medidas dos lados de um triângulo são 3, 4 e 6 unidades. O valor do cosseno do maior ângulo interno desse triangulo é:

a) $\frac{11}{24}$ b) $-\frac{10}{3}$ c) $-\frac{3}{8}$ d) $\frac{3}{8}$ e) $-\frac{11}{24}$

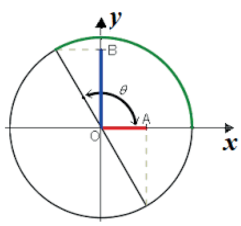
5. A medida, em radianos, de um ângulo de 225º é:

a) $\frac{5\pi}{4}$ b) $\frac{4\pi}{5}$ c) $\frac{3\pi}{4}$ d) $\frac{2\pi}{4}$ e) $\frac{2\pi}{3}$

6. Sabe-se que: $sen\alpha < 0$ e $cos\,\alpha < 0$; $cos\,\beta < 0$ e $tg\beta < 0$ e $sen\theta > 0$ e cotg$\theta > 0$ então, os quadrantes onde estão os ângulos α, β e θ são:

a) 2º, 1º e 3º b) 3º, 2º e 1º c) 3º, 1º e 2º d) 1º , 2º e 3º e) 3º , 2º e 2º

7. Sabendo-se que $\theta = 120º$, determinando o produto $\overline{\mathrm{OA}} \cdot \overline{\mathrm{OB}}$, encontraremos:



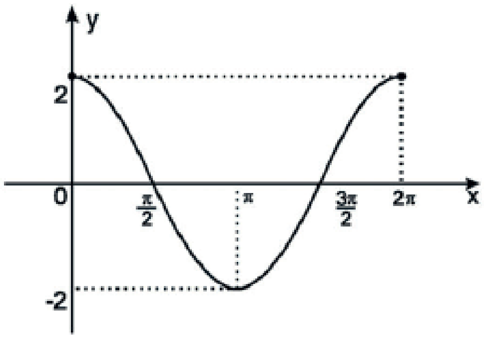
a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ c) $\frac{3}{2}$ d) $\frac{3}{4}$ e) $\frac{\sqrt{3}}{4}$

8. Sabendo-se que $tgx = \frac{3}{4}$ e $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, calculando $cos\,x - senx$, encontraremos como resposta:

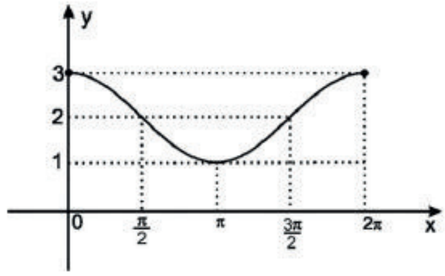
a) $\frac{7}{5}$ b) $-\frac{1}{5}$ c) $-\frac{2}{5}$ d) $\frac{2}{5}$ e) $\frac{3}{5}$

9. A função definida por $y = 2 + sen(x)$ será bem representada pelo gráfico:

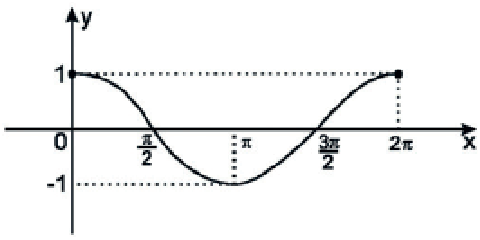
a)



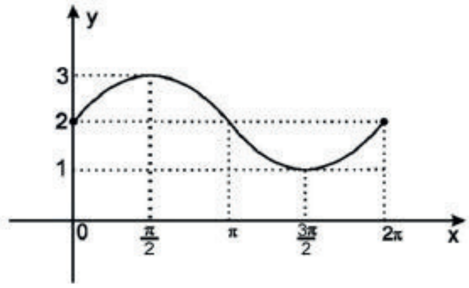
b)



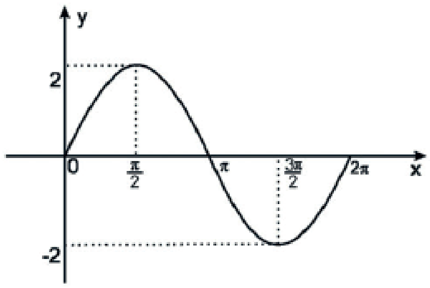
c)



d)



e)



10. Se $A = sen\frac{\pi}{4} + cos\frac{\pi}{4} + cos(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4})$ então, o valor de A é:

a) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ b) $-\frac{3\sqrt{2}}{2}$ c) $3\sqrt{2}$ d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ e) $\sqrt{2}$

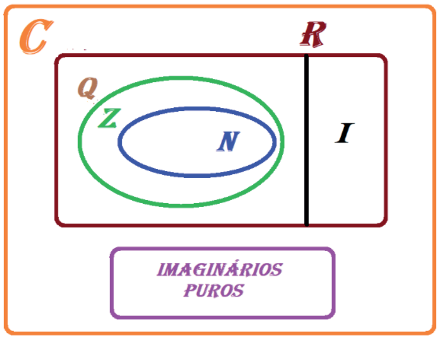
Unidade VI
O Corpo dos Números Complexos

A história da Matemática é cheia curiosidades. Uma delas é que os números complexos surgiram a partir da busca por soluções para as equações algébricas de 3º grau, e não para as de 2º grau, como geralmente se conta. Gilberto Garbi, no livro "O romance das equações algébricas", e Carl Boyer, em seu livro "História da Matemática", contam sobre isso. Essa busca por soluções teve início no século XVI, mas só depois de quase duzentos anos de discussões surgiu um vislumbre sobre como resolver as tais equações. No século XVIII, Carl Friedrich Gauss, aos 21 anos, apresentou o que é considerada a mais brilhante tese em Matemática de todos os tempos, apresentando o "Teorema Fundamental da Álgebra", pelo qual comprovava que "qualquer polinômio $P(z)$ com coeficientes complexos de uma variável e de grau ≥ 1 tem alguma raiz complexa". A seguir, apresentamos o fruto desse período de descobertas: a criação dos números complexos.

6.1 Definição de Números complexos

Chamamos de número complexo a todo par ordenado (x, y), escrito na forma algébrica $z = x + yi$, com x e y pertencentes ao conjunto dos reais, onde x representa a parte real e y representa a parte imaginária do número complexo. Matematicamente escrevemos: $\mathbb{C} = \{(x, y) | x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}\}$, portanto, como o par ordenado (x, y) pertence ao conjunto dos reais, podemos deduzir que o conjunto dos números complexos contém o conjunto dos números reais, ou que o conjunto dos reais está contido no conjunto dos complexos.

Conjunto dos complexos$\mathbb{C}$ – Diagrama Euler-Venn



Fonte: elaborado pelo autor

$\mathbb{C}$ conjunto dos números complexos

$\mathbb{R}$ conjunto dos números reais

Ip conjunto dos números imaginários puros

$\mathbb{Q}$ conjunto dos números racionais

I conjunto dos números irracionais

$\mathbb{Z}$ conjunto dos números inteiros

$\mathbb{N}$ conjunto dos números naturais

Todo complexo $z = (x, y)$ pode ser escrito na forma algébrica $z = x + yi$, $\begin{cases} x = Re(z) & \text{parte real} \\ y = Im(z) & \text{parte imaginária} \end{cases}$

Fique atento

Caso $y = 0$, temos que z é um número real e, sendo $x = 0$ e $y \neq 0$, temos que z é *imaginário puro*. Por definição (*Euler sec. XVIII*), temos que $i^2 = -1 \Rightarrow \sqrt{-1} = i$, onde i é a "*unidade imaginária*".

6.1.1 Operações com os números complexos

Dados os complexos: $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, definimos em $\mathbb{C}$:

6.1.2 adição: $z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$

6.1.3 subtração: $z_1 - z_2 = (a+bi) - (c+di) = (a-c) + (b-d)i$

6.1.4 multiplicação: $z_1 \cdot z_2 = (a+bi)\cdot(c+di) = a\cdot c + a\cdot di + bi\cdot c + bi\cdot di =$

$$= a\cdot c + (ad+bc)i + bdi^2 = a\cdot c + (ad+bc)i - bd =$$

$$\therefore z_1 \cdot z_2 = (ac-bd) + (ad+bc)i$$

6.1.5 Conjugado de um número complexo: $\bar{z}$

Chamamos de *conjugado* do número complexo $z = x + yi$, o número $\bar{z} = x - yi$, de modo que o produto de complexos conjugados será sempre um número real, $z \cdot \bar{z} \in \mathbb{R}$, pois, $z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2$.

Fique atento

- Note que a fatoração de $x^2 + y^2$ só existe no campo dos complexos: $x^2 + y^2 = (x+yi)(x-yi)$
- Sendo, $z = x + yi$ seu conjugado será $\bar{z} = x - yi$. Note que z e $\bar{z}$ são simétricos em relação ao eixo x.
- Pense: É possível ocorrer $z = \bar{z}$? Sob quais condições?

6.1.6 Divisão entre complexos:

A divisão entre dois números complexos z_1 e z_2, com $z_2 \neq 0$, será dada por: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2}$

Note que o denominador (z_2) foi multiplicado pelo seu conjugado $(\bar{z}_2)$.

6.1.7 Potências de *i*:

Veja que: $\begin{cases} i^0 = 1 \\ i^1 = i \\ i^2 = -1 \\ i^3 = -i \\ i^4 = 1 \\ . \\ . \\ . \\ i^n = i^r \end{cases}$ sendo $n \in \mathbb{N}$ e $r \in \{0,1,2,3\}$, resto da divisão de n por 4.

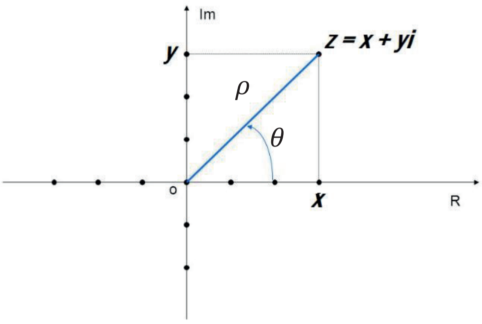
Fique atento

Observe que as potências de i começam a se repetir após a ocorrência de i^4. Então, de modo geral, temos que: $i^n + i^{n+1} + i^{n+2} + i^{n+3} = 0 \;\; \forall n \in \mathbb{N}$

6.2 Localização dos números complexos no plano Cartesiano

Definimos na Unidade I que cada número real é associado a um ponto de uma reta ou, ainda, que cada ponto da reta é a imagem (*abscissa*) de um único número real. Com os números complexos é um pouco diferente, pois, sendo eles dados por pares ordenados, sua representação se dá no plano cartesiano.

Representação do complexo $z = x + yi$ no plano de Argand-Gauss



Fonte: elaborado pelo autor.

Fique atento

Eixo *x*: marcamos a parte *real* de *z*.

Eixo *y* ou *eixo imaginário*: marcamos a parte *imaginária* de *z*.

ρ: "*rô*" *módulo* de *z* (distância de *z* até a origem do sistema de coordenadas).

θ: "*teta*" *argumento* de *z* (ângulo formado com o eixo *x* tomado no sentido anti-horário).

O ponto do plano estabelecendo a posição do complexo *z* é chamado de "***afixo de z***".

6.3 Módulo, Argumento e Forma Trigonométrica ou Polar do número complexo

Note que, aplicando o Teorema de Pitágoras, estudado na Unidade 5, no triângulo retângulo, obtemos: $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, que denominamos *módulo* do número complexo *z*, ou seja: $|z| = \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$

Aplicando agora as razões trigonométricas, também estudadas na Unidade 5, no triângulo retângulo, decorre que:

$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{x}{\rho} & \Rightarrow x = \rho \cdot \cos\theta \\ sen\theta = \frac{y}{\rho} & \Rightarrow y = \rho \cdot sen\theta \end{cases},$$

nos permitindo escrever o complexo $z = x + yi$, em função de ρ e θ, trocando x e y por: $\rho \cdot \cos\theta$ e $\rho \cdot sen\theta$ respectivamente, ou seja: $z = (\rho \cdot \cos\theta) + (\rho \cdot sen\theta)i \quad \therefore \quad z = \rho(\cos\theta + i \cdot sen\theta)$, que chamamos de *forma trigonométrica* do complexo z, ou então de *forma polar* de z.

Fique atento

Note que: $\begin{cases} z = (x, y) \\ z = x + yi \\ z = \rho(\cos\theta + i \cdot sen\theta) \end{cases}$ Escritas distintas para a mesma entidade matemática.

Aplicando os conceitos de módulo, argumento e forma trigonométrica, temos: sendo $z = 2 + 2i$, vamos determinar o *módulo*, o *argumento* e a *forma trigonométrica* ou *polar* de z.

Solução:

Módulo de z: $z = 2 + 2i \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$, como: $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, temos que: $\rho = \sqrt{(2)^2 + (2)^2}$

então, módulo de z: $\rho = 2\sqrt{2}$ ou $|z| = 2\sqrt{2}$

Argumento de z: $tg\theta = \frac{x}{y} = \frac{2}{2} \quad \therefore \quad \theta = arctg1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$ ou $\Rightarrow \theta = 45^o$

Argumento principal de z será o valor $\theta | \theta \in]-\pi, \pi]$

Forma trigonométrica de z: $z = \rho(\cos\theta + i \cdot sen\theta) \Rightarrow \quad z = 2\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i \cdot sen\frac{\pi}{4})$

Veja como se resolve um problema que não teria solução no campo dos *números reais*:

Resolver em $\mathbb{C}$ a equação $x^2 - 2x + 2 = 0$.

Solução:

Usando fórmula de Baskara: $\begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = 2 \end{cases}$ e $\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c \quad \Rightarrow \Delta = (-2)^2 - 4 \cdot (1) \cdot (2) \quad \therefore \Delta = -4$

Então: $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{-4}}{2 \cdot (1)} = \frac{2 \pm 2i}{2} = 1 \pm 1i \quad \therefore \quad x_1 = 1 + i$ e $\therefore \quad x_2 = 1 - i$

$\therefore$ S={$1 - i$; $1 + i$}

Se estivéssemos trabalhando em $\mathbb{R}$ o problema não teria solução, pois $\Delta < 0$ (*delta/discriminante*).

Um problema envolvendo as potências de ***i***: Determinar: i^{73}.

Solução:

Dividindo o expoente por 4, para verificar quantas são as repetições, temos:

$$\begin{array}{r|l} 73 & \underline{4} \\ 33 & 18 \\ 1 & \end{array} \qquad \Rightarrow i^{73} = i^{1} = i \quad \therefore \quad i^{73} = i$$

Um problema envolvendo operações com números complexos: Dados $z_1 = 3 + i$ e $z_2 - 1 + 4i$, calcular:

a) $z_1 + z_2$ b) $z_1 - z_2$ c) $z_1 \cdot z_2$ d) $\frac{z_1}{z_2}$

Solução:

a) $z_1 + z_2 = (3 + i) + (-1 + 4i) = 2 + 5i$

b) $z_1 - z_2 = (3 + i) - (-1 + 4i) = 4 - 3i$

c) $z_1 \cdot z_2 = (3 + i) \cdot (-1 + 4i) = (3)(-1) + (3)(4i) + (i)(-1) + (i)(4i)$

$$\therefore z_1 \cdot z_2 = -3 + 12i - i + 4i^2 \Rightarrow z_1 \cdot z_2 = -3 + 11i - 4 = -7 + 11i$$

$$\therefore z_1 \cdot z_2 = -7 + 11i$$

d) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{3+i}{-1+4i} = \frac{(3+i)}{(-1+4i)} \cdot \frac{(-1-4i)}{(-1-4i)} = \frac{-3-12i-i+4}{1+16} = \frac{1-13i}{17}$

$$\therefore \frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{17} - \frac{13}{17}i$$

Um problema interessante: Determine os valores de x, $x \in \mathbb{R}$ de modo que o complexo $z = 2 + (x - 4i)(2 + x)i$ seja um número real.

Solução:

Se z é número real, significa que sua parte imaginária deve ser *nula*, então:

$$z = 2 + (x - 4i)(2 + x)i = 2 + (x - 4i)(2i + xi)$$

$$z = 2 + (2xi - x^2 + 8 + 4x) \quad \therefore z = (4x + 10) + (x^2 + 2x)i$$

$$\text{Então: } x^2 + 2x = 0 \ \Rightarrow x = 0 \ \text{ ou } \ x = -2$$

Assim, temos que: para que z seja um *número real*, $x = 0$ ou $x = -2$.

Esse você nunca viu... números complexos aplicados na lida do campo! Suponha que você irá construir dois cercados quadrados para acomodar alguns animais. Para isso, você dispõe de 260 m lineares de uma tela pré-moldada. Qual deve ser a medida de corte da tela de modo a construir os cercados, cujas arestas são números inteiros?

Solução:

Escrevendo 260 de forma conveniente, temos: $260 = 10 \cdot 26 = (3^2 + 1^2)(5^2 + 1^2)$.

Como: $x^2 + y^2 = (x + yi)(x - yi)$, podemos escrever que:

$$\begin{cases} (3^2 + 1^2) = (3 + i)(3 - i) \\ (5^2 + 1^2) = (5 + i)(5 - i) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (3 + i)(5 + i) = 15 + 3i + 5i - 1 = 14 + 8i \\ (3 + i)(5 - i) = 15 - 3i + 5i + 1 = 16 + 2i \\ (3 - i)(5 + i) = 15 + 3i - 5i - 1 = 14 - 2i \\ (3 - i)(5 - i) = 15 - 3i - 5i - 1 = 14 - 8i \end{cases}$$

Descartando os valores negativos por se tratar de problema geométrico, temos que as arestas dos quadrados podem ser: ***16 m e 2 m***, ou ainda ***14m e 8m***, pois, $\begin{cases} 260 = (16^2 + 2^2) \\ 260 = (14^2 + 8^2) \end{cases}$ *tá assustado, mas gostou, que eu sei...*

6.4 Aprendendo

1. Determine o valor de α para que o produto $z_1 \cdot z_2$ seja imaginário puro, dado que:
$z_1 = 2 + \alpha i$ e $z_2 = 3 + i$

Resolução

2. Sabendo-se que $z = 4 + 2i$, determine $z - 3\bar{z}$.

Resolução

3. Localize no plano cartesiano os números complexos:
a) $z_1 = 2 + 2i$ b) $z_2 = -2 + 2i$ c) $z_3 = -2 - 2i$ d) $z_4 = 2 - 2i$
e) localizados os complexos z_1, z_2, z_3 e z_4 no plano cartesiano, o que você observa?

Resolução

4. Determine o *módulo*, o *argumento principal* e a *forma trigonométrica* de z, dado que: $z = -3\sqrt{3} + 3i$

Resolução

6.5 Síntese da Unidade

Nesta Unidade, estudamos o que são os números complexos. Vimos a motivação para sua criação, alguns dos personagens envolvidos, o período em que essas ideias floresceram, além das operações envolvendo tais números e, principalmente, percebemos que o conjunto dos números complexos contém o conjunto dos números reais, estabelecendo um corpo numérico que nos permite, uma vez modelado matematicamente um problema, buscar sua solução sem que tenhamos as limitações impostas pelo conjunto dos números reais. Finda essa Unidade, findamos também nossa disciplina. Lembre-se de que todos os assuntos aqui abordados serão de extrema importância no acompanhamento, compreensão e sedimentação dos conteúdos a serem abordados em *Cálculo Diferencial e Integral*, além de ferramentas básicas para as demais disciplinas de seu curso.
Agora é com você!

6.6 Para Saber Mais

Livros: Biblioteca Pearson / SIBI UNITAU

Molter. Trigonometria e Números Complexos com aplicações. Capítulo 4
https://plataforma.bvirtual.com.br/Acervo/Publicacao/181781

Góes. Números complexos e Equações Algébricas. Capítulo 3
https://plataforma.bvirtual.com.br/Acervo/Publicacao/31408

Bosquilha. Manual Compacto de Matemática - Ensino Médio. Capítulo 13
https://plataforma.bvirtual.com.br/Acervo/Publicacao/182306

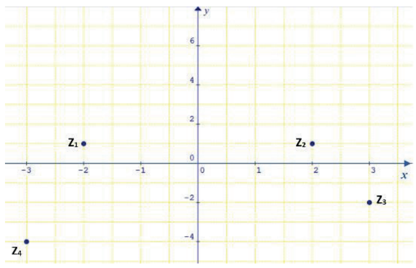
Vídeos:

Animação abordando os números complexos pelo matemático Adrien Douady (1935 - 2006):
disponível em: **https://youtu.be/T-c8hvMXENo**

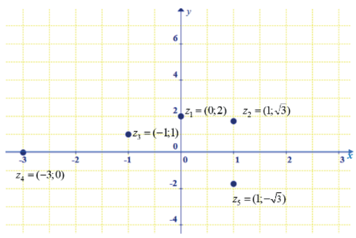
Filme produzido e legendado e sob os direitos da Creative Commons, com a organização dos autores Jos Leys, Étienne Ghys e Aurélien. São vídeos sob licença de Creative Commons, com tradução em vários idiomas, bastando selecionar em "*legendas*" a de sua preferência, logo no início da animação. Site com mais animações fantásticas sobre matemática: **http://www.dimensions-math.org**

6.7 Praticando

1. Determine a forma algébrica dos números complexos z_1, z_2, z_3, z_4representados no plano cartesiano.



2. Qual a forma polar ou trigonométrica dos complexos z_1, z_2, z_3, z_4, z_5representados no plano cartesiano?



3. Escreva a forma algébrica dos números complexos:
a)$z_1 = 2(cos\frac{\pi}{6} + isen\frac{\pi}{6})$ b) $z_2 = cos\frac{3\pi}{2} + isen\frac{3\pi}{2}$ c) $z_3 = 5(cos\,0 + isen0)$

4. Faça a representação gráfica de todos os números complexos de módulo igual a dois.

5. Dado que $z = 1 + 2i$determine o complexo w, inverso multiplicativo de z.
6. Sendo: $z_1 = 2 + 5i$ e $z_2 = 1 + 2i$, determine o complexo w, de modo que $w = \frac{z_2}{z_1}$.
7. Encontre o complexo z de modo que: $\bar{z} + 2zi - 1 = 2$.

8. Determine $x, x \in \mathbb{R}$, de modo que o número complexo $(x^2 - 25) + (x - 5)i$ seja imaginário puro.

9. Dados $z_1 = 2 + i$e $z_2 = 1 - 2i$, determine o valor da soma de seus inversos.

10. Calcule $(1 + i)^{10}$

Resolução

UNITAU digital

ISBN: 978-65-86914-55-9